

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
Departamento de Física Aplicada



# REFLEXIÓN NO LINEAL EN LA FRONTERA DE UN ABSORBENTE DENSO

Enrique Conejero Jarque

**Salamanca, Junio 1995.**

UNIVERSIDAD DE SALAMANCA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
Departamento de Física Aplicada

REFLEXIÓN NO LINEAL EN LA  
FRONTERA DE UN ABSORBENTE  
DENSO

Memoria que presenta Enrique Conejero Jarque ante la  
Facultad de Ciencias de la Universidad de Salamanca  
para optar al Grado de Salamanca.

Salamanca, Junio 1995.

D. VICTOR ALEXANDROVICH MALYSHEV, PROFESOR  
VISITANTE DEL ÁREA DE ÓPTICA DEL DEPARTAMENTO DE  
FÍSICA APLICADA DE LA UNIVERSIDAD DE SALAMANCA,

CERTIFICA:

Que el presente trabajo ha sido realizado bajo su dirección en el  
Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Salamanca por  
Enrique Conejero Jarque y constituye la Memoria que presenta para optar  
al Grado de Salamanca.

Y para que así conste, firma la presente en Salamanca a 6 de Junio  
de 1995.

Fdo: Victor Alexandrovich Malyshev

## AGRADECIMIENTOS

Para no aburrir al lector y a fin de no provocar envidias, vergüenzas o agravios, prescindiré de la consabida e interminable lista de agradecimientos y menciones. Simplemente quiero expresar mi gratitud al profesor Victor Malyshev, sin cuya supervisión y ayuda este trabajo no existiría, y al profesor Luis Roso por sus acertadas sugerencias.



# ÍNDICE

INTRODUCCIÓN	1
1. TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA	5
1.1. ECUACIONES DE MAXWELL	5
1.2. ECUACIÓN DE ONDAS	7
1.3. EL PROBLEMA LINEAL	8
1.4. CONDICIONES DE CONTORNO. FÓRMULAS DE FRESNEL	11
2. PROPAGACIÓN LINEAL EN UN SÓLIDO CERCA DE RESONANCIA	15
2.1. DENSIDADES MUY BAJAS ( $\Psi \ll 1$ )	18
2.2. DENSIDADES ALTAS ( $\Psi \gg 1$ )	21
2.3. POLARITONES	28
3. PROBLEMA NO LINEAL ESTACIONARIO	31
3.1. APROXIMACIÓN DE LA ENVOLVENTE LENTAMENTE VARIABLE (SVEA)	32
3.2. FUNCIÓN DIELECTRICA NO LINEAL	34
3.3. SOLUCIÓN EXACTA ESTACIONARIA	39

3.4. AUTORREFLEXIÓN	41
3.5. INFLUENCIA DE LA DESINTONÍA	46
3.6. RESPUESTA MULTIVALUADA	46
3.7. PARÁMETROS CRÍTICOS PARA LA RESPUESTA MULTIVALUADA	49
4. PROPAGACIÓN EN RÉGIMEN NO LINEAL ESTACIONARIO	57
4.1. EL PROBLEMA DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO. LA ECUACIÓN INTEGRAL	58
4.2. RESULTADOS DEL CÁLCULO NUMÉRICO	61
4.2.1. Ciclo de histéresis óptica	62
4.2.2. Autooscilaciones	65
4.2.3. Comportamiento caótico	74
CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	79
APÉNDICE A. LA ECUACIÓN DE DISPERSIÓN	81
APÉNDICE B. MODELO MICROSCÓPICO DEL SISTEMA	85
APÉNDICE C. FORMA INTEGRAL DE LA ECUACIÓN DE ONDAS	99
REFERENCIAS	105



# INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es estudiar la reflexión del campo eléctrico en la frontera entre el vacío y un medio absorbente denso, partiendo del caso más sencillo hasta llegar al estudio dinámico de un sistema de estas características, que no se había desarrollado hasta la fecha. Por absorbente denso entendemos que el índice de refracción (su módulo) sea bastante mayor que uno para la frecuencia del campo incidente, o a nivel microscópico que la densidad de átomos o su momento dipolar sea grande. Nos interesa en particular el caso de reflexión no lineal de un campo incidente de amplitud grande y frecuencia próxima a una resonancia propia del medio.

Para no complicar innecesariamente el problema haremos un estudio unidimensional, restringiéndonos al caso de un campo con forma de onda plana que incide perpendicularmente a la superficie de separación vacío-absorbente. Se han realizado estudios de la respuesta estacionaria fuera de incidencia normal [1, 2] que tienen una gran complejidad y que en el caso de la respuesta dinámica pensamos que no aportarían más luz al problema. También nos ceñiremos al caso de campos eléctricos monocromáticos o "casimonocromáticos" (armónicos con envolventes temporales en forma de pulso suave que incluyen muchos ciclos ópticos) lo cual no supone una limitación importante como veremos.

Hagamos un breve resumen del contenido del trabajo:

En primer lugar, y tras un breve recordatorio de la teoría

electromagnética que vamos a utilizar [3, 4], analizaremos la propagación de una onda en un medio lineal, entendiendo por lineal que la permitividad dieléctrica no depende del campo eléctrico, llegando a las leyes de propagación y condiciones de contorno conocidas (fórmulas de Fresnel). Más adelante introduciremos la función dieléctrica lineal correspondiente a un medio absorbente cerca de resonancia para hacer un estudio más concreto [5, 6].

Tras un análisis de la propagación para distintos valores de la densidad en el absorbente, pasamos al problema no lineal, empleando la función dieléctrica no lineal dependiente del campo eléctrico y estudiando las soluciones estacionarias de la propagación en el campo. Esta parte del trabajo está basada en los trabajos de Luis Roso y Marisa Pons [1, 7 - 9]. La mayor peculiaridad de este sistema es la aparición de una reflexión en la superficie del absorbente que puede ser multivaluada para ciertos valores de los parámetros que lo caracterizan.

Por último se llega a lo que constituye la mayor novedad de este trabajo y que es el estudio dinámico de la propagación, basado esencialmente es nuestro artículo [10]. Para ello hacemos uso de las ecuaciones de propagación en forma diferencial e integral. Esta última es muy adecuada para la resolución de este problema, en el que no se había utilizado con anterioridad, aunque sí es habitual en estudios sobre propagación en láminas delgadas [11 - 15]. Como objetivo nos proponemos confirmar la posibilidad de que aparezca biestabilidad (o multiestabilidad) óptica y también ciclos de histéresis, o bien que se produzcan en el sistema inestabilidades y comportamientos dinámicos complejos como puedan ser oscilaciones o caos ya que la dimensionalidad infinita del problema (es un medio continuo) lo permite. Fenómenos de este tipo son habituales en dispositivos ópticos activos y

pasivos con realimentación [16, 17] pero nuestro sistema no tiene esa característica. Para averiguar si en nuestro caso aparecen esos fenómenos resolveremos numéricamente las ecuaciones de evolución del sistema, lo cual resulta bastante complicado al ser un conjunto de ecuaciones diferenciales e integrales acopladas, las de Maxwell-Bloch, en las que no puede utilizarse ninguna aproximación acerca de la dependencia espacial del campo eléctrico, a diferencia de otros sistemas ampliamente estudiados [18 - 20].

Además del estudio de la propagación en el absorbente denso hemos querido incluir breves resúmenes de algunas teorías necesarias para la comprensión del problema y que, para no interrumpir el desarrollo lógico del trabajo, hemos preferido incorporar como apéndices. De este modo puede encontrarse un apunte muy somero sobre la teoría de dispersión y la dependencia con la frecuencia de la respuesta dieléctrica [21, 22], una explicación de la teoría microscópica semiclásica que nos da la expresión de la función dieléctrica que utilizamos (en el caso estacionario) y las ecuaciones de evolución de las variables macroscópicas del sistema en presencia del campo eléctrico (en el caso dinámico) [5, 23] analizando su validez y particularmente la importancia de la corrección debida al campo local [6, 22] que no consideramos en este trabajo. Por último detallamos la deducción de la forma integral de la ecuación de propagación que utilizaremos en nuestros cálculos y que se emplea en otros problemas relacionados con la propagación (superradiancia, generación de armónicos, etc.) [15].

A lo largo del trabajo utilizaremos unidades gaussianas, que simplifican notablemente las expresiones y son ampliamente usadas en óptica y física atómica.



# 1. TEORÍA ELECTROMAGNÉTICA

## 1.1 ECUACIONES DE MAXWELL

Nuestro punto de partida son las ecuaciones de Maxwell, que describen el campo electromagnético tanto en el vacío como en el medio. Necesitamos además otras ecuaciones que nos den la respuesta del material a dicho campo.

Recordemos las ecuaciones de Maxwell [3, 4]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (1.1.a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1.b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \quad (1.1.c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.1.d)$$

Los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  son el campo y el desplazamiento eléctricos, mientras que  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$  son respectivamente campo e inducción magnética. Las fuentes vienen representadas por  $\vec{j}$ , corriente eléctrica, y  $\rho$ , densidad de carga eléctrica.

Las relaciones entre estas magnitudes son descritas por las ecuaciones materiales. En general el desplazamiento eléctrico y el campo magnético son funciones cualesquiera de campo eléctrico e inducción magnética

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}) \quad (1.2.a)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}) \quad (1.2.b)$$

Para medios conductores hay una ley de Ohm generalizada que expresa la corriente eléctrica en función de los campos

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B}) \quad (1.3)$$

En casi todos los materiales nos basta con los términos dipolares puesto que los cuadrupolares y de orden superior son absolutamente despreciables [3]. Por tanto las ecuaciones materiales toman la forma más sencilla

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (1.4.a)$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \quad (1.4.b)$$

$\vec{P}$  es la polarización eléctrica y  $\vec{M}$  la magnética, que representan la respuesta del medio al campo externo y cuya forma depende del caso particular.

En cuanto a la corriente, habitualmente la ley de Ohm

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} \quad (1.5)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad, representa bien un medio conductor y no necesitamos ecuaciones más complicadas.

Consideraremos medios no magnéticos, que son los que nos interesan habitualmente en óptica, donde podemos escribir la relación lineal

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \quad (1.6)$$

La permitividad magnética será  $\mu = 1$ , la del vacío. Además estamos interesados en medios eléctricamente neutros con densidad de carga neta nula ( $\rho = 0$ ) y no conductores ( $\sigma = 0$ ), aunque la conductividad puede incorporarse fácilmente a la respuesta dieléctrica más adelante.

Por tanto las ecuaciones de Maxwell quedan reducidas a las mucho más sencillas

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \quad (1.7.a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.7.b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.7.c)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (1.7.d)$$

que, junto con la relación (1.4.a), serán las que usemos a lo largo de este trabajo.

## 1.2. ECUACIÓN DE ONDAS

Para separar los campos eléctrico y magnético se toma el rotacional en la ecuación (1.7.b) y se deriva con respecto al tiempo en la (1.7.a), sustituyendo en la anterior. Si utilizamos (1.7.c) y usando una sencilla identidad vectorial llegamos a

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \quad (1.8)$$

Los campos con los que trabajamos son transversales, es decir, la polarización del campo es perpendicular a la dirección de propagación (suponemos el eje OX), y polarizados linealmente (los campos son en general transversales salvo en medios anisótropos o inhomogéneos). Consideraremos siempre el caso particular de incidencia normal, en el que la dirección de propagación es perpendicular a la frontera de separación entre el vacío y el medio (plano YZ), pudiendo reducir el problema a una sola dimensión puesto que  $\vec{E} = E(x)\hat{y}$ , siendo  $\hat{y}$  el vector unitario en la dirección OY y también  $\vec{P} = P(x, E)\hat{y}$  ya que nuestro medio será además isótropo. De este modo la divergencia de  $\vec{E}$  es nula y nos queda la conocida ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (1.9)$$

válida teniendo en cuenta estas consideraciones.

### 1.3. EL PROBLEMA LINEAL

Los campos con los que tratamos son monocromáticos, esto es, tienen la forma

$$E(x, t) = \frac{1}{2} E(x) e^{i\omega t} + c.c. \quad (1.10)$$

(el campo eléctrico es una magnitud real, por eso hay que sumar el complejo conjugado, pero su amplitud espacial puede ser compleja). La aproximación armónica no supone una restricción importante puesto que



si la dependencia temporal es diferente siempre podemos descomponer el campo en serie de Fourier como suma de sus distintos armónicos, resolviendo el problema independientemente para cada uno de ellos y luego sumando las respuestas. En todo caso nuestros campos siempre serán "casiarmónicos", con una envolvente temporal que nos da una forma de pulso muy suave, como explicaremos después.

Consideremos un medio en el que la polarización puede escribirse de la siguiente forma

$$P = \chi E \quad (1.11)$$

donde  $\chi$  es una constante compleja llamada susceptibilidad eléctrica. Esta igualdad es válida para la frecuencia concreta del campo, puesto que en general la susceptibilidad depende de dicha frecuencia del campo incidente (ver apéndice A).

En este caso el medio es lineal y la solución del problema es sencilla como veremos. El desplazamiento vendrá dado por

$$D = (1 + 4\pi\chi)E \equiv \varepsilon E \quad (1.12)$$

$\varepsilon$  es la constante dieléctrica del medio (en el caso del vacío  $\varepsilon = 1$ ).

La ecuación de ondas se reduce entonces a

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

La solución general de esta ecuación es de la forma [4]

$$E = f(x - vt) + b(x + vt) \quad (1.14)$$

donde  $f$ ,  $b$  son funciones determinadas por las condiciones de contorno y  $v$  es la velocidad de propagación de la onda en el medio, definida como

$$v = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\epsilon} \quad (1.15)$$

$n$  se llama índice de refracción, y al igual que la constante dieléctrica será una magnitud compleja. Como veremos, su parte real da cuenta de la propagación y la imaginaria de la absorción.

Introduciendo la forma del campo en la ecuación de ondas obtenemos para  $E$  la ecuación de Helmholtz homogénea en una dimensión

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k^2 E = 0 \quad (1.16)$$

con  $k = n \omega / c \equiv n k_0$ , que recibe el nombre de constante de propagación o número de onda. La longitud de onda es  $\lambda = 2 \pi / k$ .

La solución es muy sencilla:

$$E(x) = E_f e^{ikx} + E_b e^{-ikx} \quad (1.17)$$

superposición de una onda plana que se propaga en sentido positivo con amplitud  $E_f$  y otra que lo hace en sentido negativo con amplitud  $E_b$ .

#### 1.4. CONDICIONES DE CONTORNO. FÓRMULAS DE FRESNEL

Imponiendo que el campo incidente es una onda plana que se propaga en sentido positivo del eje OX con amplitud  $E_0$ , en la frontera entre vacío y absorbente ( $x = 0$ ) una parte del campo se reflejará y otra se transmitirá, como esquematizamos en la figura 1

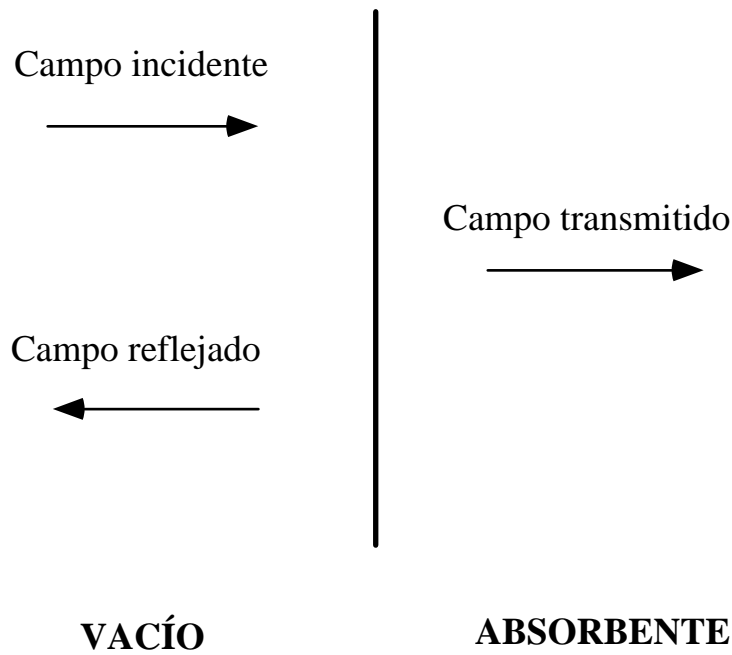


Figura 1. Esquema de la propagación y reflexión del campo al llegar al absorbente.

Tenemos por tanto que el campo en el vacío,  $E_v$ , es el incidente más el reflejado, mientras en el medio absorbente no hay más que campo transmitido,  $E_a$ :

$$E_v = E_0 e^{ik_0 x} + E_r e^{-ik_0 x} \quad (1.18.a)$$

$$E_a = E_t e^{ikx} \quad (1.18.b)$$

Imponiendo la continuidad del campo y su derivada en la frontera, cosa que podemos hacer puesto que su dirección, al ser el campo transversal, es paralela a la frontera (en el caso en que hubiese componente normal a la frontera lo que es continuo es el desplazamiento [3]), llegamos a las relaciones

$$E_0 + E_r = E_t \quad (1.19.a)$$

$$E_0 - E_r = nE_t \quad (1.19.b)$$

con lo que obtenemos las siguientes expresiones para las amplitudes de los campos transmitido y reflejado

$$E_t = \frac{2}{1+n} E_0 \quad (1.20.a)$$

$$E_r = \frac{1-n}{1+n} E_0 \quad (1.20.b)$$

Los coeficientes de transmisión y reflexión (o reflectividad) se definen como

$$t = \left| \frac{E_t}{E_0} \right| = \left| \frac{2}{1+n} \right| \quad (1.21.a)$$

$$r = \left| \frac{E_r}{E_0} \right| = \left| \frac{E(0) - E_0}{E_0} \right| = \left| \frac{1-n}{1+n} \right| \quad (1.21.b)$$

recuperando las conocidas [4] fórmulas de Fresnel para incidencia normal.

Así pues, el campo dentro del medio tiene la forma

$$E_a(x) = \frac{2E_0}{1+n} e^{ik_0 n x} \quad (1.22)$$

Si separamos el índice de refracción en sus partes real,  $n_r$ , e imaginaria,  $n_i$ , tenemos

$$E_a(x) = \frac{2E_0}{1+n} e^{ik_0 n_r x} e^{-k_0 n_i x} \quad (1.23)$$

Vemos ahora claramente que la parte imaginaria del índice de refracción es la que causa que haya una absorción exponencial. La real da una renormalización de la constante de propagación en el medio, y por lo tanto de la longitud de onda. La intensidad del campo en el material tiene la forma siguiente

$$I_a(x) = E_a E_a^* = \frac{4E_0^2}{|1+n|^2} e^{-2k_0 n_i x} \quad (1.24)$$

(En realidad la intensidad del campo es el flujo del vector de Poynting  $\vec{S} = c/4\pi \vec{E} \times \vec{H}$  a través de una superficie, que al promediar en el tiempo en un ciclo óptico nos da la densidad de energía del campo  $W = |\vec{E}|^2/8\pi$ ).

Normalmente se llama constante de absorción (o coeficiente de extinción) a  $\alpha = 2k_0 n_i$ , y a su inverso  $d = 1/\alpha$  longitud de penetración, que es aquella en la que la intensidad decae a  $1/e$  su valor en la frontera.

Otro aspecto a tener en cuenta es que al ser  $n$  complejo, la amplitud del campo en la frontera no está en fase con la incidente, siendo el desfase

$$\theta = \arctg \left[ \frac{\text{Im}(E_t)}{\text{Re}(E_t)} \right] = \arctg \left( \frac{-n_i}{1+n_r} \right) \quad (1.25)$$

tanto mayor cuanto más grande sea la parte imaginaria del índice.

Podemos observar todas estas características en la siguiente figura, en la que representamos la propagación del campo eléctrico incidente (no el total) fuera del absorbente y del transmitido dentro.

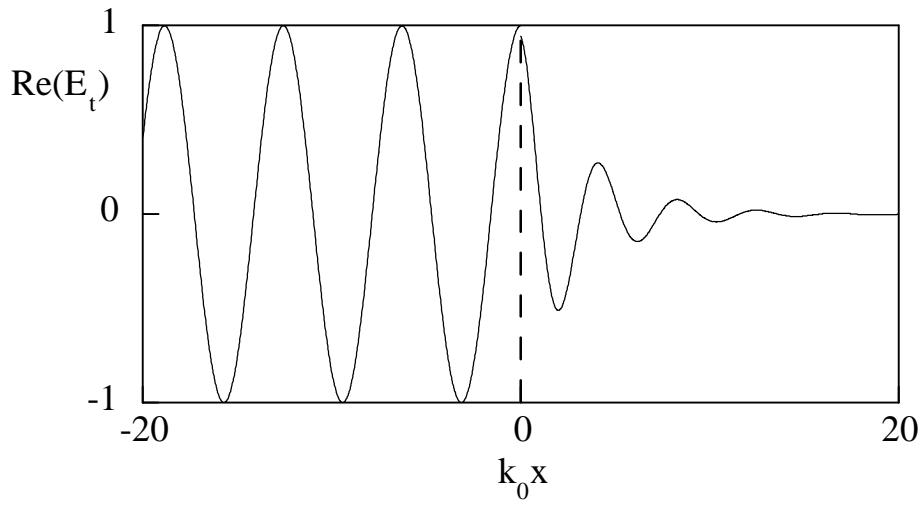


Figura 2. Parte real del campo eléctrico incidente ( $x < 0$ ) y transmitido ( $x > 0$ ) frente a la coordenada normalizada  $k_0 x$  para el caso  $n_r = 1.5$ ,  $n_i = 0.3$ .

## 2. PROPAGACIÓN LINEAL EN UN SÓLIDO CERCA DE RESONANCIA

Introduzcamos una expresión para la constante dieléctrica lineal válida para un sólido iónico en la proximidad de una resonancia, despreciando otras contribuciones que no son importantes y considerando que la amplitud del campo incidente es pequeña. En el apéndice B se justifica con detalle esta expresión.

$$\varepsilon = n^2 = 1 + 2\Psi \frac{\delta + i}{1 + \delta^2} \quad (2.1)$$

Llamamos a  $\Psi$  densidad óptica, que será siempre positiva, y a  $\delta$  desintonía.  $\delta$  depende de la frecuencia de la luz incidente en la forma

$$\delta = \frac{\omega_T - \omega}{\gamma} \quad (2.2)$$

de forma que si  $\omega = \omega_T$  se hace cero, apareciendo entonces un estado de resonancia.  $\gamma$  es una constante de relajación relacionada con los procesos microscópicos en el absorbente (ver apéndice B).

De este modo la constante dieléctrica podemos considerarla función de la frecuencia de la luz incidente, siendo más apropiado el nombre de función dieléctrica, que usaremos de ahora en adelante. (Ver apéndice A).

En la figura 3 podemos ver cómo varían la parte real y la imaginaria de  $\varepsilon$  al hacerlo  $\delta$ , en el caso particular de  $\Psi = 1$ .

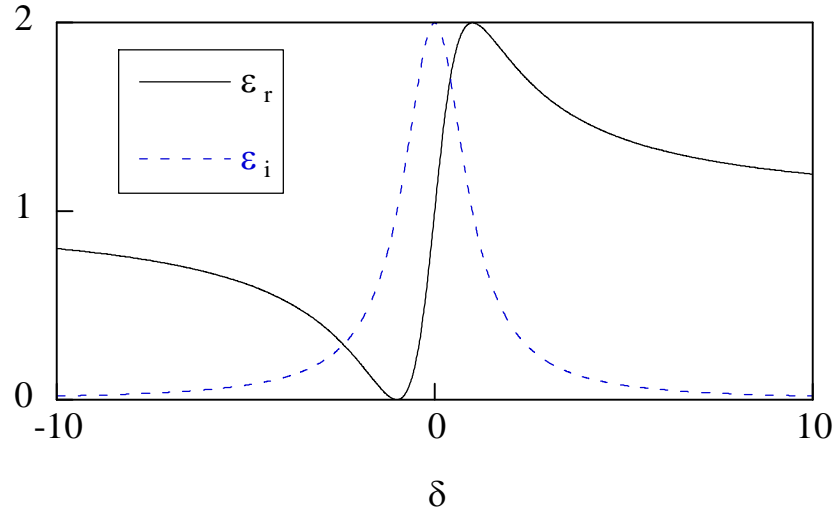


Figura 3. Gráfica de las partes real (línea continua) e imaginaria (discontinua) de la función dieléctrica en función de la desintonía para  $\Psi = 1$ .

A partir de la definición  $n^2 \equiv \varepsilon$  obtenemos las siguientes relaciones generales para las componentes del índice de refracción

$$n_r = \sqrt{\frac{\varepsilon_r + \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2}}{2}} \quad (2.3.a)$$

$$n_i = \frac{\varepsilon_i}{2n_r} = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{2[\varepsilon_r + \sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2}]}} \quad (2.3.b)$$

En la figura 4 podemos ver gráficas de  $n_r$  y  $n_i$  en el mismo caso de la figura 2 y para completar el análisis del caso particular  $\Psi = 1$  representamos los factores de reflexión y transmisión en función de la desintonía en la figura 5.

Las expresiones exactas del índice en función de los parámetros  $\Psi$  y  $\delta$  resultan bastante complicadas pero a continuación analizaremos algunos casos particulares. Antes hagamos un par de consideraciones generales.



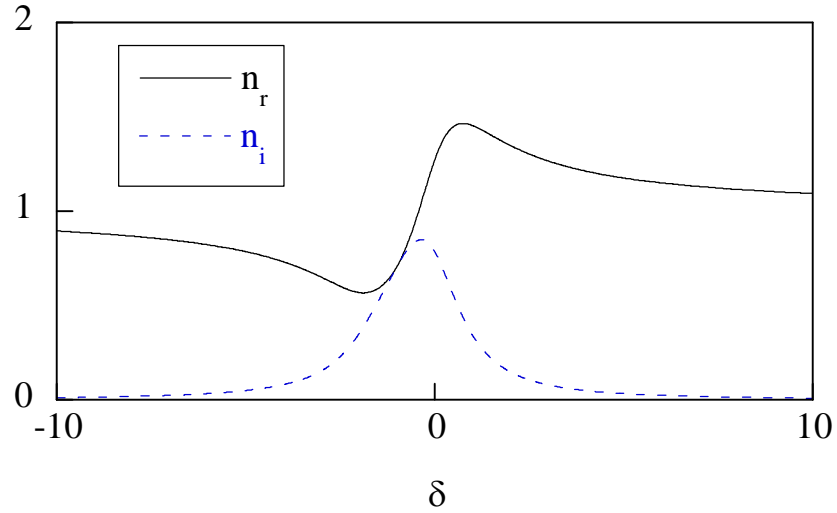


Figura 4. Partes real (línea continua) e imaginaria (discontinua) del índice de refracción para las mismas condiciones de la figura 2.

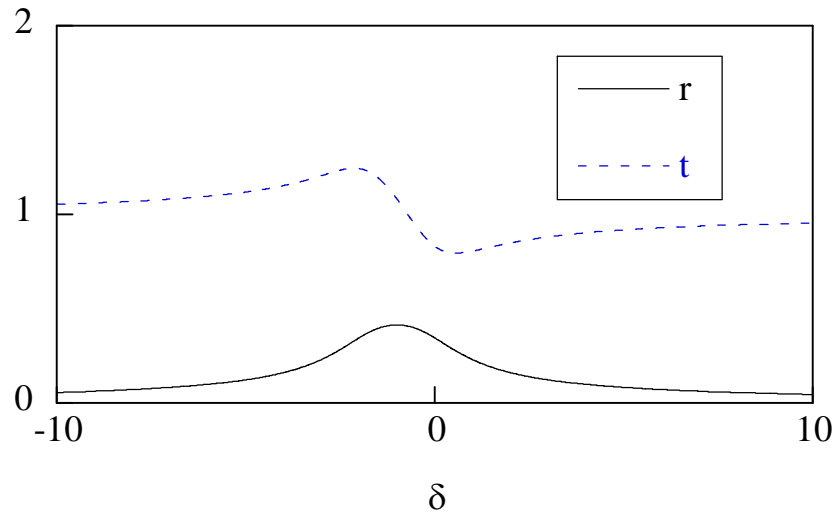


Figura 5. Variación de los coeficientes de reflexión ( $r$ ) y transmisión ( $t$ ) con la desintonía para el caso  $\Psi = 1$ .

$\Psi$  es positivo pero  $\delta$  puede ser positivo o negativo. Por ello aunque la parte imaginaria de la función dieléctrica es siempre mayor que cero, la real puede tomar en ocasiones valores negativos. Esto tiene consecuencias importantes como veremos.

## 2.1. DENSIDADES MUY BAJAS ( $\Psi \ll 1$ )

En este caso, en el que el medio no será sólido sino gaseoso, se verifica que

$$\varepsilon_r = 1 + 2\Psi \frac{\delta}{1 + \delta^2} \gg \frac{2\Psi}{1 + \delta^2} = \varepsilon_i \quad (2.4)$$

luego podemos aproximar

$$\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_i^2} \approx \varepsilon_r \left( 1 + \frac{\varepsilon_i^2}{\varepsilon_r^2} \right) \approx \varepsilon_r \quad (2.5)$$

obteniendo

$$n_r \approx \sqrt{\varepsilon_r} \approx 1 + \Psi \frac{\delta}{1 + \delta^2} \approx 1 \quad (2.6.a)$$

$$n_i \approx \frac{\varepsilon_i}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \approx \frac{\varepsilon_i}{2} \ll 1 \quad (2.6.b)$$

Solamente hay propagación, con muy poca amortiguación. Esto es lógico pues para  $\Psi \ll 1$  recuperamos  $\varepsilon \approx 1$ , que es el caso del vacío. Además

$$t = \left| \frac{2}{1 + n} \right| \approx 1 \quad (2.7.a)$$

$$r = \left| \frac{1 - n}{1 + n} \right| \ll 1 \quad (2.7.b)$$

y apenas hay desfase al ser  $n$  real.

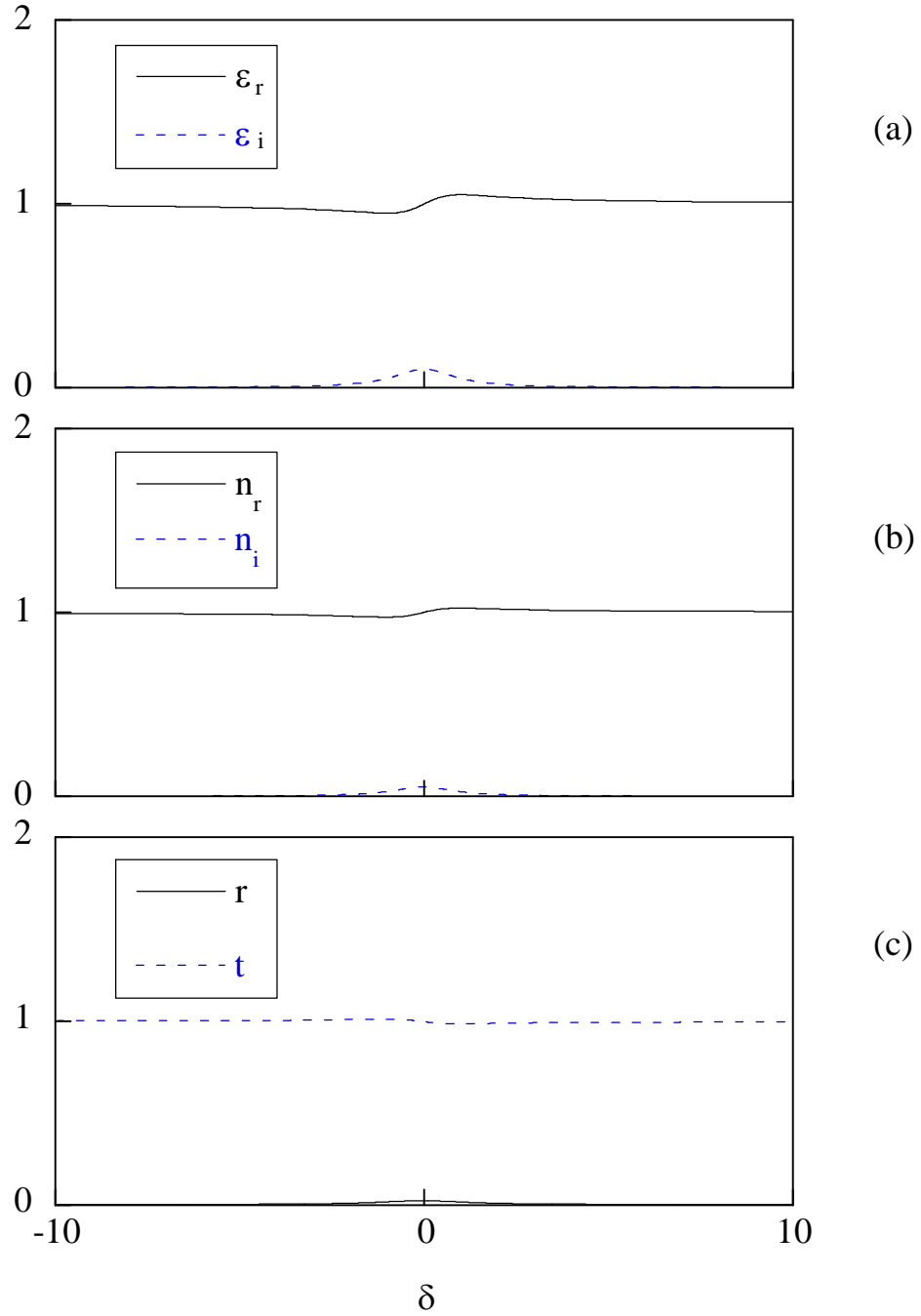


Figura 6. Dependencia con  $\delta$  de la función dieléctrica (a), índice de refracción (b) y coeficientes de reflexión y transmisión (c) para una densidad  $\Psi = 0.05$ .

En la figura 6 vemos cómo se comportan los parámetros en función de la desintonía para el caso  $\Psi = 0.05$ .

Podemos comprobar cómo salvo muy cerca de resonancia apenas hay absorción o reflexión. En la figura 7 podemos ver el comportamiento del campo en este caso para valores  $\delta = 0$  y  $\delta = 5$ . Para comparar la longitud de onda interna con la del vacío recordemos que esta última tiene el valor  $2\pi$  en unidades de  $1/k_0$ .

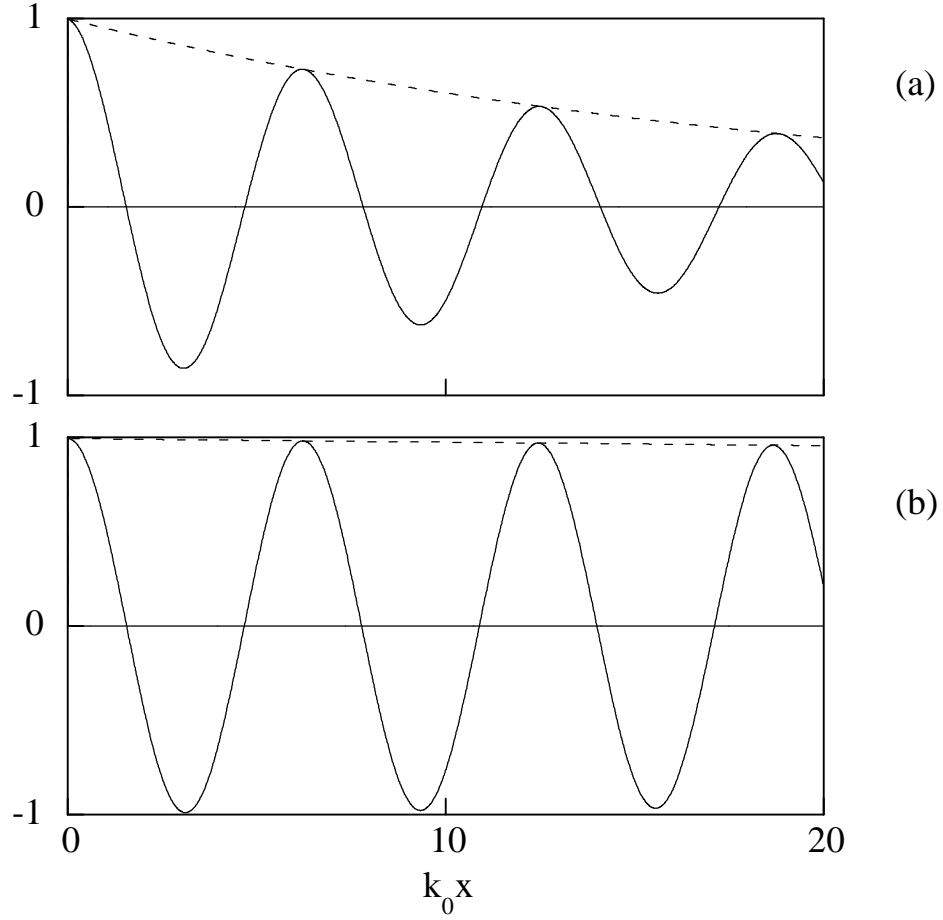


Figura 7. Propagación del campo eléctrico en el caso de baja densidad  $\Psi = 0.05$  para valores  $\delta = 0$  (a) y  $\delta = 5$  (b). La línea continua representa la parte real del campo y la de trazos su módulo.

## 2.2 DENSIDADES ALTAS ( $\Psi \gg 1$ )

Si  $\Psi \gg 1$  la respuesta dependerá mucho de los valores de la desintonía. Analicemos distintas posibilidades, evitando aquellos casos en que la densidad y el valor absoluto de la desintonía sean del mismo orden pues entonces la respuesta será complicada y variará mucho en función de los valores concretos de los parámetros, como se apreciará en el estudio general. En la figura 8 podemos ver la respuesta del medio en el caso  $\Psi = 20$  variando la desintonía desde -30 a 30.

Analicemos las distintas posibilidades:

a)  $|\delta| \gg \Psi \gg 1$

En este caso se verificará que

$$\delta^2 + 1 \gg 2\Psi, 2\Psi\delta \quad (2.8)$$

y entonces estaremos en condiciones similares a las de densidades bajas ya estudiadas anteriormente (Eqs. 2.6). Así pues es conveniente tener en cuenta que la densidad efectiva no viene dada sólo por el parámetro  $\Psi$ , sino que la desintonía es muy importante, y muy lejos de resonancia el medio es prácticamente transparente, aunque no hay que olvidar que la expresión que usamos para la función dieléctrica no es válida con toda generalidad muy lejos de una resonancia.

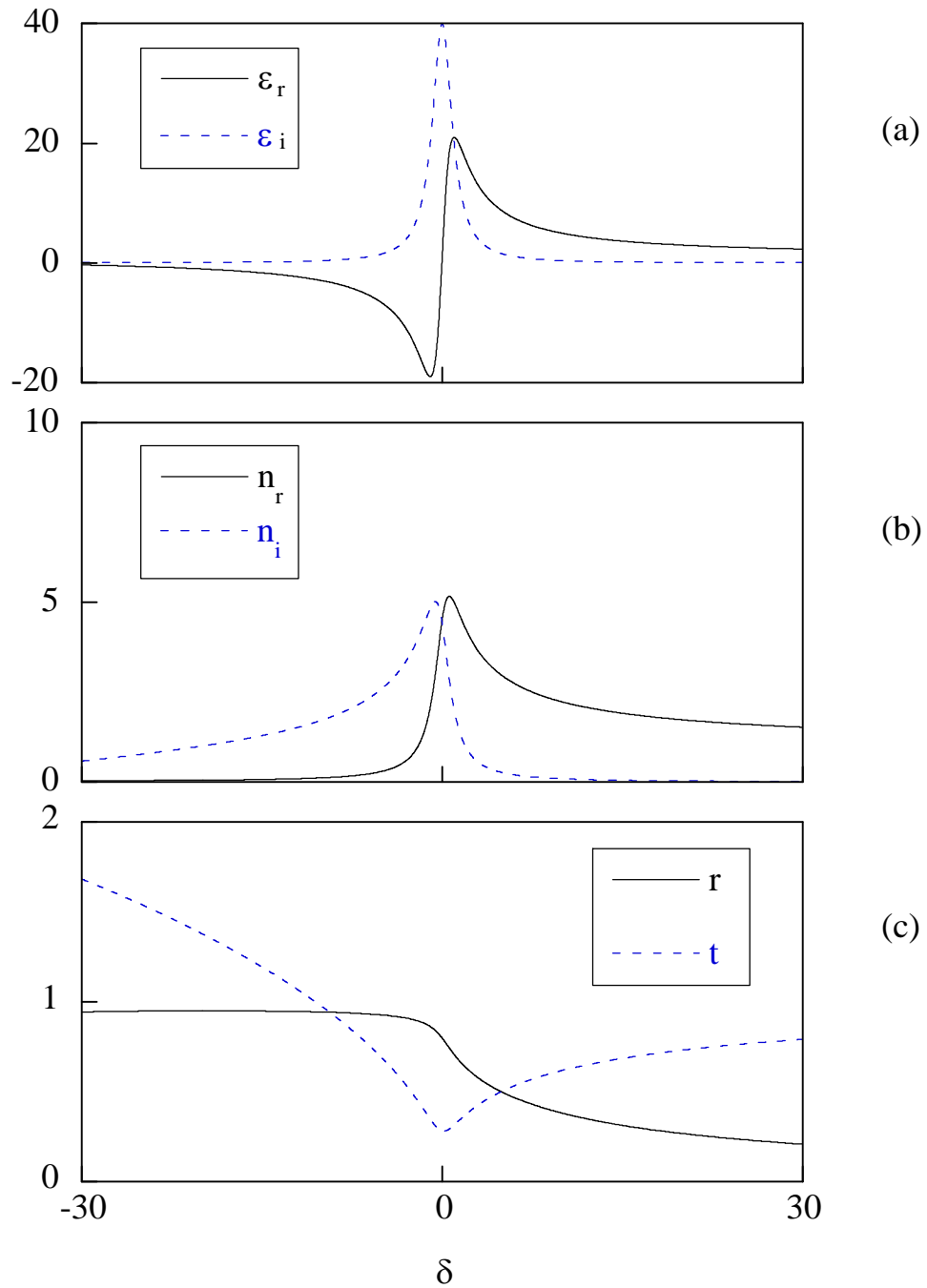


Figura 8. Respuesta dieléctrica del absorbente en el caso  $\Psi = 20$  en función de la desintonía. a) función dieléctrica, b) índice de refracción, c) coeficientes de reflexión y transmisión.

b)  $\Psi \gg \delta \gg 1$

Ahora será

$$\varepsilon_r \approx \frac{2 \Psi \delta}{1 + \delta^2} \gg \frac{2 \Psi}{1 + \delta^2} = \varepsilon_i \quad (2.9)$$

la diferencia con el caso de baja densidad es que  $\varepsilon_r \gg 1$  (también puede serlo  $\varepsilon_i$ ). Haciendo aproximaciones similares llegamos a

$$n_r \approx \sqrt{\varepsilon_r} > 1 \quad (2.10.a)$$

$$n_i \approx \frac{\varepsilon_i}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \approx \frac{n_r}{\delta} \ll n_r \quad (2.10.b)$$

Pueden apreciarse estas características en la figura 8 en la zona intermedia de desintonías positivas ( $5 < \delta < 10$ ).

La renormalización de la longitud de onda es muy grande ( $\lambda \ll \lambda_0$ ), y el decaimiento exponencial es más lento puesto que

$$\alpha = 2n_i k_0 \ll n_r k_0 = k \quad (2.11)$$

con lo cual  $d \gg \lambda$  y el campo describe varios ciclos dentro del medio antes de absorberse.

En cuanto a la amplitud del campo transmitido tenemos que

$$|E_t| \approx \left| \frac{2}{n} \right| E_0 < E_0 \quad (2.12)$$

el campo transmitido es relativamente pequeño, mientras que la reflexión es apreciable. El desfase también es pequeño ya que  $n_r \gg n_i$ . En la figura

9 vemos el campo interno en el caso  $\delta = 7$ .

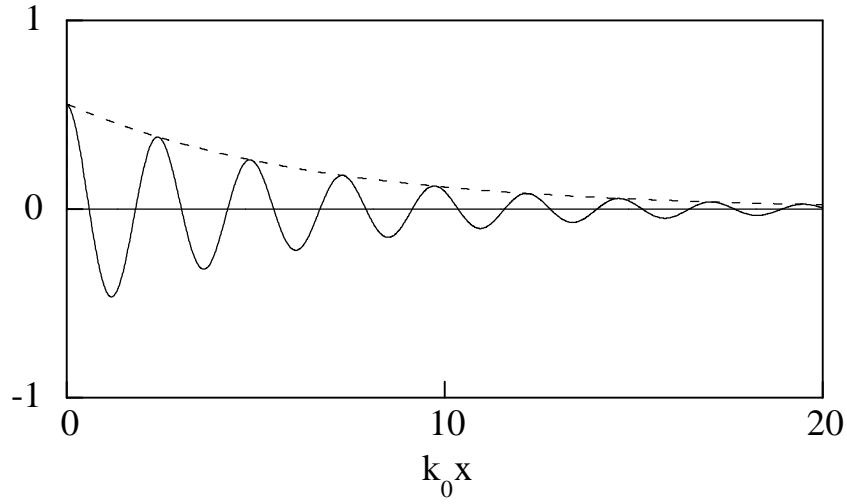


Figura 9. Parte real (línea continua) y amplitud (línea de trazos) del campo dentro del absorbente en el caso  $\Psi = 20$  y  $\delta = 7$ .

c)  $|\delta| \ll 1$

En este caso se verifica justo lo contrario que en los anteriores:

$$\varepsilon_i = \frac{2\Psi}{1+\delta^2} \gg 1 + \frac{2\Psi\delta}{1+\delta^2} = \varepsilon_r \quad (2.13)$$

y el índice de refracción viene dado esencialmente por la parte imaginaria de la función dieléctrica

$$n_r \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{2}} \approx \sqrt{\Psi} \gg 1 \quad (2.14.a)$$

$$n_i = \frac{\varepsilon_i}{2n_r} \approx \sqrt{\frac{\varepsilon_i}{2}} \approx \sqrt{\Psi} \gg 1 \quad (2.14.b)$$

Las partes real e imaginaria del índice son del mismo orden de magnitud



y mayores que la unidad. En particular, al ser grande la parte imaginaria, la absorción es fuerte y el campo se amortigua rápidamente, en una escala similar a la longitud de onda interna, que es mucho menor que la del vacío.

$$d \approx \lambda \ll \lambda_0 \quad (2.15)$$

Utilizando las fórmulas que nos dan la transmisión y la reflexión vemos que la primera es muy pequeña mientras que la segunda se aproxima a uno. En esta ocasión el salto de fase sí es importante

$$\theta \approx \arctg\left(\frac{-n_i}{n_r}\right) \approx -\frac{\pi}{2} \quad (2.16)$$

Podemos ver una gráfica del campo para resonancia en la figura 10.

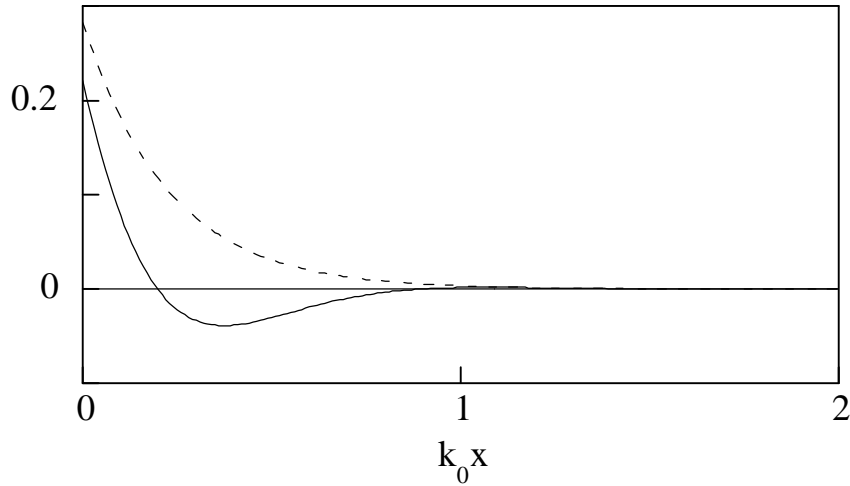


Figura 10. Parte real del campo y amplitud en el caso  $\Psi = 20$  y  $\delta = 0$ . Vemos que la amortiguación es rápida pero el campo describe al menos una oscilación.

$$d) \delta < 0, \Psi \gg |\delta| \gg 1$$

En este caso estamos por encima de resonancia y lo que ocurre es que  $\varepsilon_r < 0$  y  $|\varepsilon_r| \gg \varepsilon_i$  con lo cual

$$n_r^2 \approx \frac{-|\varepsilon_r| + |\varepsilon_r|}{2} \approx 0 \quad (2.17.a)$$

$$n_i^2 \approx |\varepsilon_r| \approx \frac{2\Psi|\delta|}{1 + \delta^2} \gg 1 \quad (2.17.b)$$

Es la parte real negativa de la función dieléctrica la que nos da un índice de refracción prácticamente imaginario, con lo cual la absorción es inmediata, ocurre mucho antes de una longitud de onda. Este signo negativo de  $\varepsilon_r$  significa que la polarización oscila en contrafase con el campo incidente, y el decaimiento ocurre por interferencia destructiva entre el campo externo y el de reacción interno. La amplitud del campo transmitido es pequeña:

$$|E_t| \approx \left| \frac{2}{1 + in_i} \right| E_0 < E_0 \quad (2.18)$$

y la reflexión casi completamente uno:

$$r \approx \left| \frac{1 - in_i}{1 + in_i} \right| = 1 \quad (2.19)$$

Se trata en este caso de un reflector perfecto más que de un absorbente; en efecto, el medio se comporta como un metal, pero los fenómenos microscópicos son distintos ya que en un metal la reflexión total se debe a

la oscilación de los electrones libres (interacción del campo con la resonancia del plasma [6, 21]) mientras que aquí es la interacción del campo con los átomos resonantes lo que la provoca.

En la figura 11 vemos el campo dentro del medio para  $\delta = -4$ .

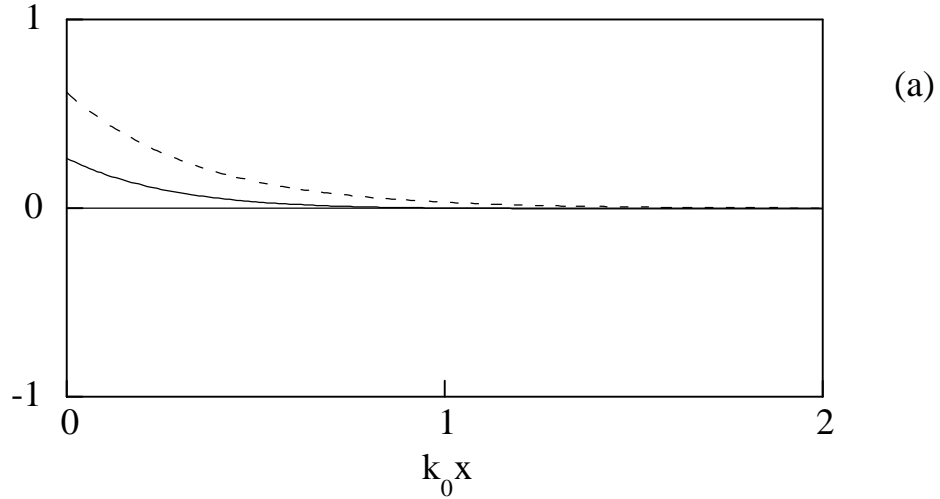


Figura 11. Comportamiento del campo eléctrico para  $\delta = -4$ . Observamos que a diferencia del caso próximo a resonancia, el campo se absorbe antes de describir un ciclo.

Para que la parte real de la función dieléctrica sea negativa y por tanto la reflexión casi total, debe verificarse la desigualdad

$$1 + \frac{2\Psi\delta}{1 + \delta^2} < 0 \quad (2.20)$$

de donde

$$-\Psi - \sqrt{\Psi^2 - 1} < \delta < -\Psi + \sqrt{\Psi^2 - 1} \quad (2.21)$$

condición que sólo ocurre para densidades mayores que uno. En nuestro

caso  $\Psi \gg 1$  y la condición se simplifica a  $0 > \delta > -2\Psi$ . Puede demostrarse que la máxima reflexión ocurre para  $\delta \approx -\Psi$  en cuyo caso  $r(-\Psi) = 1 - \Psi^{-1}$ .

### 2.3. POLARITONES

Todo lo que hemos estado discutiendo tiene relación directa con las excitaciones propias del sistema. Si buscamos la solución de la ecuación de ondas (1.13) en forma de ondas planas  $E = E_0 \exp[-i(\omega t - kx)]$  obtendremos la ecuación de dispersión (apéndice A)

$$\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = k^2 \quad (2.22)$$

considerada como una ecuación  $\omega(k)$  (recordemos que  $\delta$  depende de la frecuencia). Sustituyendo  $\varepsilon \approx \varepsilon_r$  pues en los casos que nos interesan  $|\varepsilon_r| \gg \varepsilon_i$ , podemos resolverla obteniendo dos ramas separadas entre las cuales hay una banda prohibida o "gap" desde  $\omega_T$  hasta  $\omega_T + 2\Psi\gamma$ . Los campos con frecuencias entre esos límites no pueden propagarse dentro del medio, siendo totalmente reflejados, de acuerdo con esta simplificación del modelo lineal. En la figura 12 esquematizamos esta banda.

Estos estados mezcla de luz y materia fueron introducidos por primera vez por Born y Huang [24] como el acoplamiento entre el campo y las oscilaciones de la red iónica (fonones) representado por unas pseudopartículas denominadas polaritones [6, 21]. En nuestro caso este acoplamiento es entre la luz y las excitaciones de los sistemas de dos

niveles que forman el medio. Los autores de la teoría correspondiente fueron Hopfield [25] y Agranovich [26].

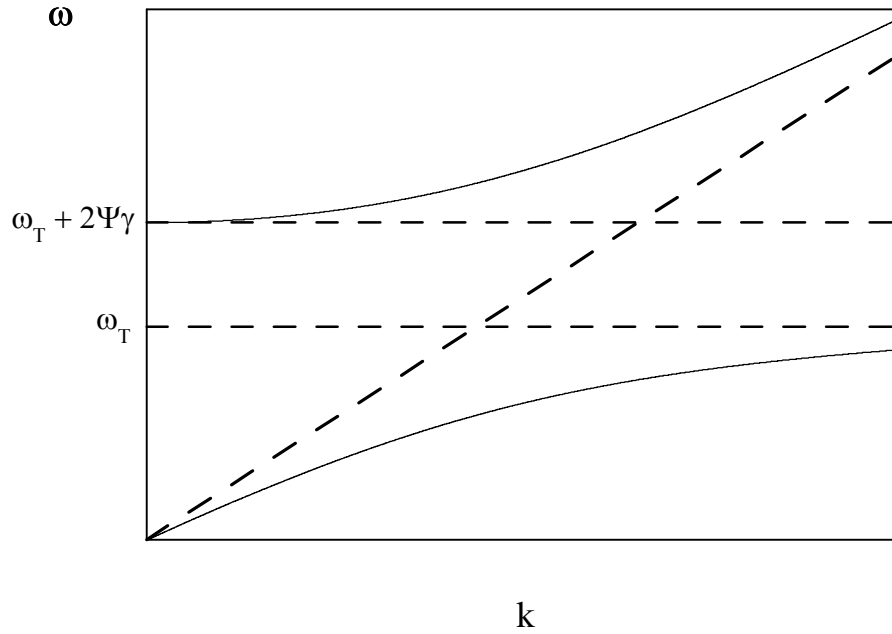


Figura 12. Esquema de las ramas polaritónicas. Puede apreciarse la región de frecuencias prohibidas por encima de la propia del sistema.



### 3. PROBLEMA NO LINEAL ESTACIONARIO

Como hemos dicho, en el caso general tenemos que resolver la ecuación de ondas no homogénea (1.9) con  $P$  la polarización del medio, que dependerá de  $E$ ,  $t$ ,  $x$ .

En muchos casos el campo incidente tiene una dependencia temporal casi armónica  $E(x, t) = \frac{1}{2} E(x, t) e^{i\omega t} + c.c.$ , con la envolvente  $E$  lentamente variable en el tiempo en forma de pulso de duración  $T_p$ , siendo este tiempo muy superior a los propios de relajación del sistema  $T_2$  y  $T_1$  (ver apéndice B). Entonces la polarización eléctrica en el medio sigue adiabáticamente al campo: responde instantáneamente a la variación de éste y podemos escribir  $P(x, t) = \frac{1}{2} P(E, x, t) e^{i\omega t} + c.c.$  de forma que la dependencia temporal de  $P(E, x, t)$  es la misma que la de la envolvente del campo. Además en casi todos los materiales no existe una polarización eléctrica permanente en ausencia de campo externo, es decir,  $P(E = 0, x, t) = 0$  con lo cual es posible factorizar

$$P(E, x, t) = \frac{\chi(E, x)}{4\pi} E(x, t) \quad (3.1)$$

pudiendo de este modo escribir

$$D = E + 4\pi P = \frac{1}{2} (1 + \chi(E)) E e^{i\omega t} + c.c. \equiv \frac{1}{2} \epsilon(E) E e^{i\omega t} + c.c. \quad (3.2)$$

Introduciendo esta expresión en las ecuaciones de Maxwell, del mismo

modo que en el caso lineal y teniendo siempre en cuenta que los campos son transversales (por eso la aproximación de una dimensión) llegamos a la misma ecuación de Helmholtz pero en este caso no lineal:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_0^2 \varepsilon(E) E = 0 \quad (3.3)$$

### 3.1. APROXIMACIÓN DE LA ENVOLVENTE LENTAMENTE VARIABLE (SVEA)

La solución de esta ecuación depende obviamente de la forma funcional de  $\varepsilon(E)$ . Cuando el campo es pequeño, se podrá hacer un desarrollo

$$\varepsilon(E) = 1 + \chi(E) \approx 1 + \chi(0) + \alpha E + \beta E^2 + \dots \quad (3.4)$$

y podemos pensar que la solución no estará lejos de la homogénea

$$E(x) = \tilde{E}(x) e^{ik_0 x} \quad (3.5)$$

una onda plana con una envolvente  $\tilde{E}$ , donde la dependencia espacial de la envolvente es mucho más suave que la parte de onda plana, es decir,

$$\left| \frac{d^2 \tilde{E}}{dx^2} \right| \ll k_0 \left| \frac{d\tilde{E}}{dx} \right| \ll k_0^2 \tilde{E} \quad (3.6)$$

Esta aproximación, ampliamente utilizada, recibe el nombre de aproximación de la envolvente lentamente variable (SVEA en la literatura



en inglés) [2, 5].

Introduciendo esa expresión en la ecuación de onda obtenemos para la envolvente la siguiente ecuación

$$\frac{d\tilde{E}}{dx} = \frac{ik_0}{2} (\varepsilon - 1) \tilde{E} \quad (3.7)$$

que presenta la ventaja de que pueden desacoplarse la amplitud y la fase de  $\tilde{E}$ . Si escribimos

$$\tilde{E}(x) = |\tilde{E}(x)| e^{i\varphi(x)} \quad (3.8)$$

obtenemos

$$\frac{d|\tilde{E}|}{dx} = -\frac{k_0}{2} \varepsilon_i |\tilde{E}| \quad (3.9.a)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{k_0}{2} (\varepsilon_r - 1) |\tilde{E}| \quad (3.9.b)$$

Como la función dieléctrica dependerá sólo del módulo (estamos suponiendo medios isótropos), tenemos una ecuación diferencial para  $|\tilde{E}|$  fácil de resolver, al menos numéricamente, dependiendo de la forma de la parte imaginaria de la función dieléctrica.

Sin embargo, la SVEA no nos da toda la información sobre el comportamiento del absorbente para intensidades grandes, como veremos más adelante.

### 3.2. FUNCIÓN DIELECTRICA NO LINEAL

Nuestra función dieléctrica estacionaria no lineal cerca de resonancia es

$$\varepsilon = 1 + 2 \Psi \frac{\delta + i}{1 + \delta^2 + \theta |E|^2} \quad (3.10)$$

donde  $\theta > 0$  es una constante que depende del medio (ver apéndice B).

Definiendo

$$\varepsilon_L = 1 + 2 \Psi \frac{\delta + i}{1 + \delta^2} \quad (3.11.a)$$

$$I \equiv |E|^2 \quad (3.11.b)$$

$$I_s = \frac{1 + \delta^2}{\theta} \quad (3.11.c)$$

donde  $\varepsilon_L$  no es más que la función dieléctrica lineal,  $I$  la intensidad del campo eléctrico e  $I_s$  un nuevo parámetro que llamaremos intensidad de saturación, obtenemos una nueva expresión para la función dieléctrica [2, 9]

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_L + I/I_s}{1 + I/I_s} \quad (3.12)$$

Con esta expresión vemos muy claramente que para intensidades muy bajas recuperamos la respuesta lineal y si son mucho mayores que la de saturación  $\varepsilon$  se aproxima a uno, esto es, el medio se hace transparente. Podemos apreciar esto en las figuras 13 (densidad baja) y 14 (densidad alta) en las que representamos el índice de refracción en función de la desintonía. Vemos cómo para intensidades muy bajas obtenemos los

valores lineales y para las muy altas el medio se asemeja al vacío ( $n_r \approx 1$ ,  $n_i \approx 0$ ) y la absorción es casi inexistente.

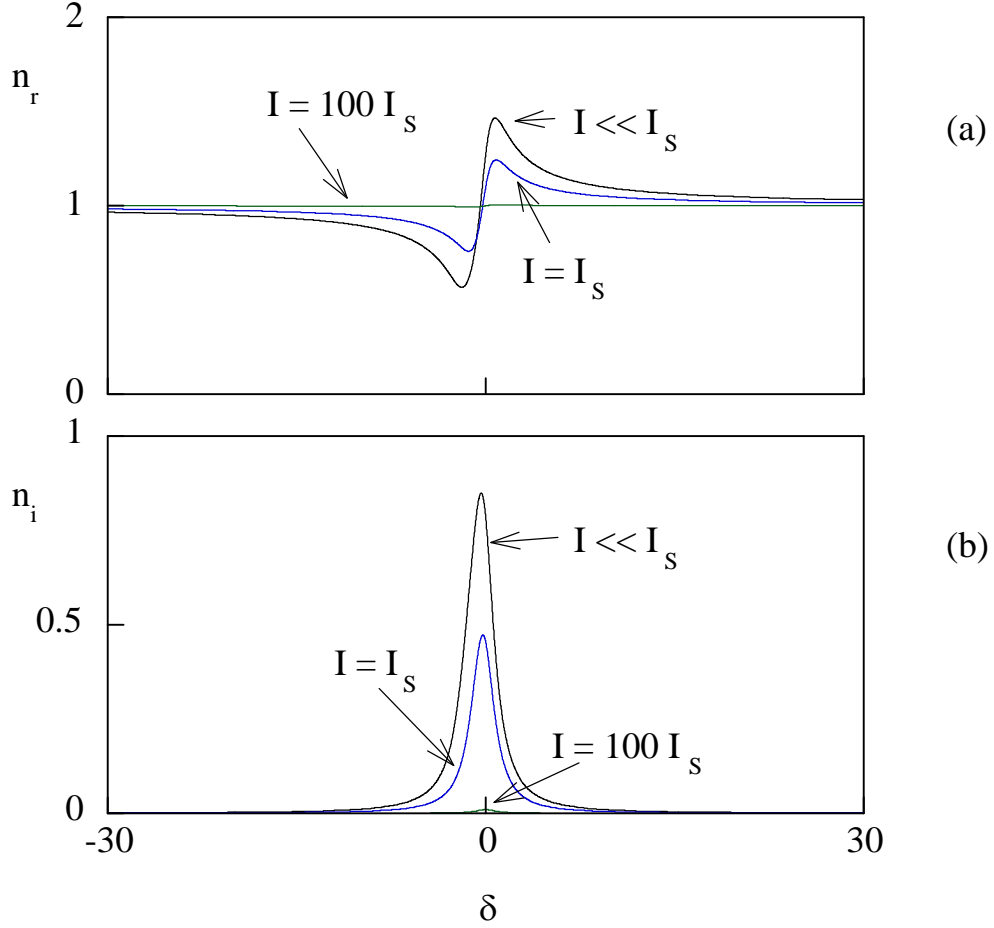


Figura 13. Gráficas de la parte real (a) e imaginaria (b) del índice de refracción para valores de la intensidad muy por debajo (caso lineal), igual y muy por encima del de saturación para  $\Psi = 1$ .

Veamos qué nos dice la aproximación SVEA en nuestro problema. Utilizando las correspondientes relaciones llegamos a la siguiente ecuación para la intensidad

$$\frac{dI}{dx} = -k_0 \frac{\epsilon_L^i}{1 + I/I_s} I \quad (3.13)$$

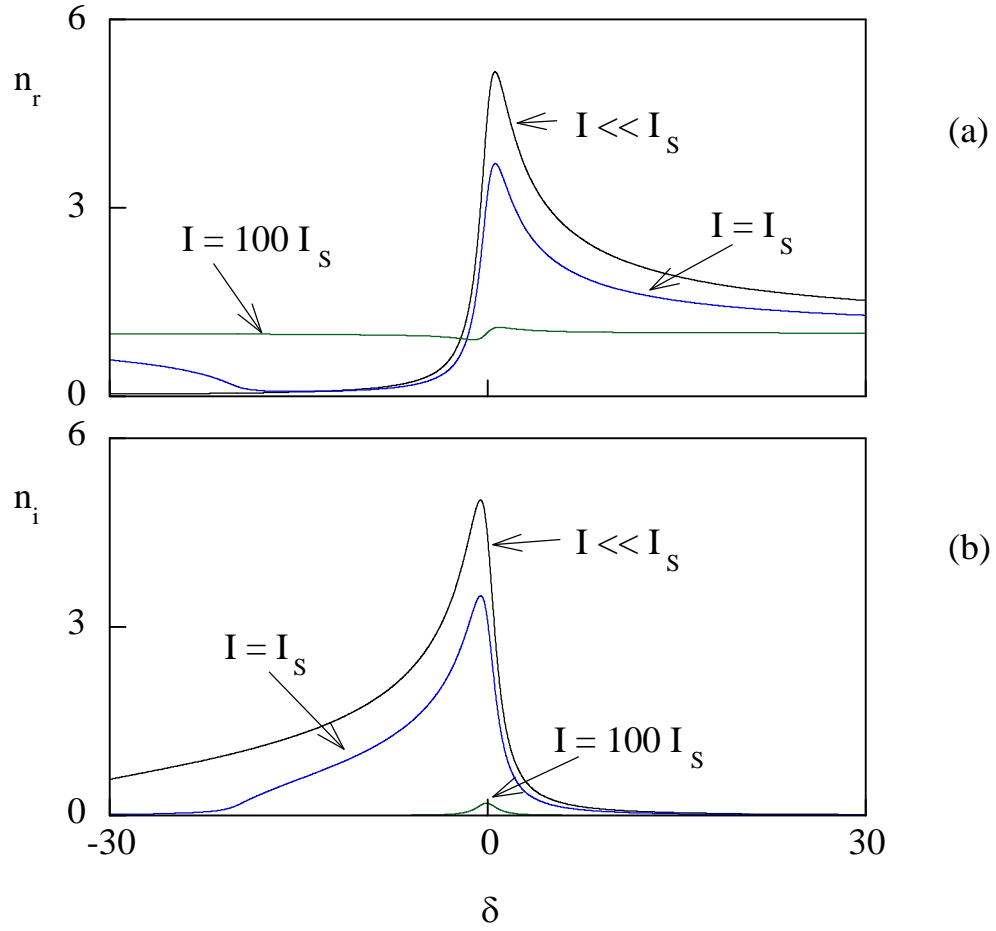


Figura 14. Igual que la figura anterior pero para densidad mucho mayor ( $\Psi = 20$ ).

que podemos resolver inmediatamente sin mayor dificultad

$$\ln \frac{I(0)}{I(x)} + \frac{I(0) - I(x)}{I_s} = k_0 \varepsilon_L^i x \quad (3.14)$$

Conviene observar que de la ecuación diferencial se deduce automáticamente que  $dI/dx \leq 0$  siempre, luego la intensidad del campo decrece en el material en todo punto, de acuerdo con su condición de absorbente.

En esta aproximación podemos diferenciar dos regímenes bien

distintos:

a) Régimen lineal ( $I \ll I_s$ )

En este caso de la ecuación anterior se sigue que

$$I(x) \approx I(0)e^{-k_0 \varepsilon_L^i x} \quad (3.15)$$

La intensidad decae exponencialmente, como en el caso lineal, pero no exactamente igual pues recordemos que en aquel caso la exponencial era  $e^{-k_0 n_i x}$ . Podemos verlo en la figura 15 para  $I(0) = 0.1 I_s$  (línea de puntos).

b) Régimen saturado ( $I \gg I_s$ )

Ahora podemos despreciar el término logarítmico y quedarnos con

$$I(x) \approx I(0) - I_s k_0 \varepsilon_L^i x \quad (3.16)$$

Curiosamente en este caso el decrecimiento es lineal, y tanto más lento cuanto menor sea la intensidad de saturación. En la figura 15 representamos con línea continua el caso en que  $I(0) = 10 I_s$  que entra dentro de este régimen.

En el caso general la absorción comienza siendo lineal para hacerse exponencial al bajar del valor de saturación, como se ve para  $I(0) = I_s$  en la gráfica de trazos de la figura 15.

Antes de abordar el problema de la solución exacta podemos obtener una serie de conclusiones a partir de un sencillo estudio cualitativo.

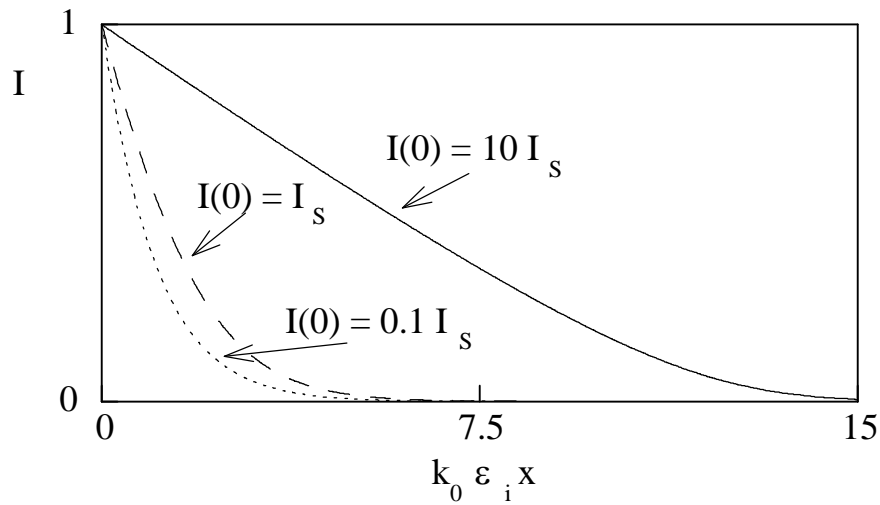


Figura 15. Decrecimiento de la intensidad del campo en el absorbente en el régimen lineal (línea de puntos), saturado (línea continua) y en uno intermedio (línea de trazos).

Dado que la intensidad del campo eléctrico depende de la coordenada dentro el absorbente y que como hemos visto, en líneas generales el campo irá decreciendo según va penetrando en el material debido a la parte imaginaria de la función dieléctrica, es posible que aunque el campo alcance valores de saturación en las proximidades de la frontera, más lejos su valor decaiga a magnitudes más pequeñas hasta alcanzar el régimen lineal.

Si nos centramos en el caso más interesante para nosotros, que es aquel en el que la frecuencia del campo está dentro de esa banda de no propagación (band gap) en la que en el caso lineal teníamos reflexión total del campo (es decir  $\delta < 0$ ,  $\Psi \gg |\delta| \gg 1$ ), si la intensidad en la frontera alcanza valores de saturación tendremos que la parte real de la función dieléctrica será prácticamente uno y la imaginaria muy pequeña.

A partir de la frontera el campo decrecerá linealmente hasta algún punto  $x_c$  en que la parte real de la función dieléctrica cambia de signo

haciéndose negativa. En ese momento el decrecimiento del campo viene gobernado por esa parte real en lugar de por la imaginaria y será muy rápido en el espacio: el paso de régimen saturado a lineal ocurre en un espacio más pequeño que la longitud de onda.

En ese punto  $x_c$  el campo se reflejará casi totalmente y esa onda reflejada interferirá con la que se propaga hacia adelante desde la frontera. Como resultado podemos esperar que haya una modulación en la amplitud del campo interno tal y como esquematizamos en la figura 16. Esto influirá también en la reflexión del campo en la frontera.

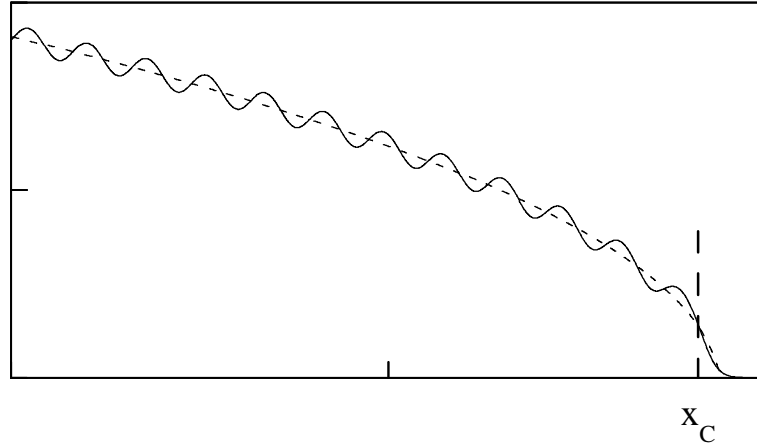


Figura 16. Amplitud del campo dentro del absorbente.

### 3.3. SOLUCIÓN EXACTA ESTACIONARIA

Debemos por tanto intentar resolver la ecuación diferencial compleja estacionaria

$$\frac{d^2 E}{dx^2} + k_0^2 \left( 1 + 2 \Psi \frac{i + \delta}{1 + \delta^2 + \theta |E|^2} \right) E = 0 \quad (3.17)$$

Es posible resolverla de forma numérica (de forma analítica no podemos puesto que la parte real y la imaginaria están acopladas) pero tenemos el problema de que las condiciones de contorno en la frontera

$$E_r + E_i = E(0) \quad (3.18.a)$$

$$ik_0(E_r - E_i) = \frac{dE}{dx}(0) \quad (3.18.b)$$

no nos permiten utilizarla como origen de la solución, ya que no conocemos a priori la relación entre el campo y su derivada. Cuando pasemos al formalismo de ecuación integral este problema desaparecerá al estar las condiciones de contorno incluidas automáticamente en la ecuación.

Ahora podemos resolverlo haciendo una suposición física [7]: dado que el medio es absorbente, a una profundidad  $x_0$  suficientemente grande la amplitud del campo será muy pequeña y a partir de ese punto será válida la aproximación lineal y por tanto en esa región tendremos

$$E(x) = E(x_0)e^{ik_0n(x-x_0)} \quad (3.19)$$

con  $n$  el índice lineal de modo que ahí será

$$\frac{dE}{dx}(x_0) = ik_0nE(x_0) \quad (3.20)$$

y conociendo el valor del campo y su derivada en un punto podemos integrar la ecuación diferencial hacia atrás, fijando en cada caso la posición de la frontera ( $x = 0$ ) donde queramos y obteniendo a partir de



$E(0)$  y  $dE(0)/dx$  el valor de los campos incidente y reflejado correspondientes usando las condiciones de contorno en la frontera y por tanto los factores de reflexión, transmisión, etc.

Aprovechando que la ecuación diferencial (3.17) es conservativa, esto es, no tiene ningún término con la derivada primera del campo, para integrarla numéricamente usamos la regla de Stoermer [27] con un paso suficientemente pequeño.

Además conviene renormalizar nuestras variables para hacerlas adimensionales. Definimos para ello

$$e = \sqrt{\theta} E \quad (3.21.a)$$

$$\xi = k_0 x \quad (3.21.b)$$

y llamaremos  $e_0$  a la amplitud del campo incidente estacionario. La ecuación diferencial (3.17) normalizada es muy sencilla

$$\frac{\partial^2 e}{\partial \xi^2} + \left( 1 + 2 \Psi \frac{i + \delta}{1 + \delta^2 + |e|^2} \right) e = 0 \quad (3.22)$$

### 3.4. AUTORREFLEXIÓN

Resolviendo dicha ecuación por el método indicado [7 - 9] podemos observar que cuando  $\Psi$  es pequeño, lo que ocurre para absorbentes poco densos, los resultados obtenidos son aproximadamente los que nos daba la SVEA, sin que aparezca ninguna modulación importante al ser el cambio en la función dieléctrica y en el índice de refracción suave como vemos en la figura 17 para  $\Psi = 1$ ,  $\delta = -1$ .

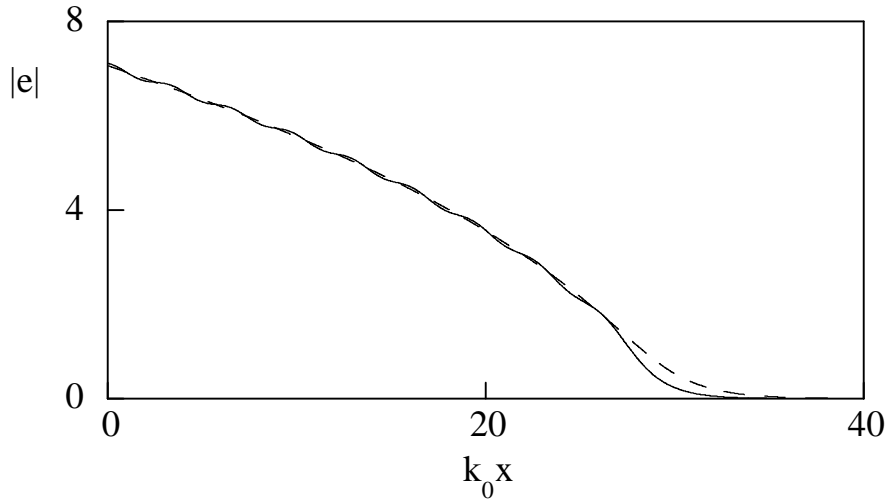


Figura 17. Perfil del módulo de la amplitud del campo eléctrico normalizado  $|e| = \sqrt{\theta}|E|$  dentro del absorbente para valores de los parámetros  $\Psi = 1$ ,  $\delta = -1$  y campo incidente  $e_0 = 7$ . La línea de trazos representa la solución SVEA.

Para valores grandes de  $\Psi$ , y  $\delta$  dentro de la banda prohibida polaritónica (que son los parámetros que nos interesan) vemos que hay dos regímenes diferentes: si la amplitud del campo incidente es lo suficientemente pequeña, será válida la aproximación lineal y habrá gran atenuación y reflexión total. Si por el contrario el campo es lo suficientemente grande la aproximación lineal falla por completo y obtenemos precisamente lo que habíamos supuesto en nuestro análisis cualitativo anterior: cerca de la frontera hay gran saturación y el campo decae en promedio linealmente pero presentando una modulación (más o menos visible dependiendo de los parámetros concretos). Cuando el campo ha decrecido lo suficiente, salimos rápidamente del régimen de saturación y la absorción es muy rápida. En la figura 18 vemos el caso  $\Psi = 4$ ,  $\delta = -4$  y en la 19  $\Psi = 7$ ,  $\delta = -7$ . Podemos observar que cuanto mayor es la densidad, peor aproximación es la SVEA puesto que la

modulación es mayor y la absorción más rápida.

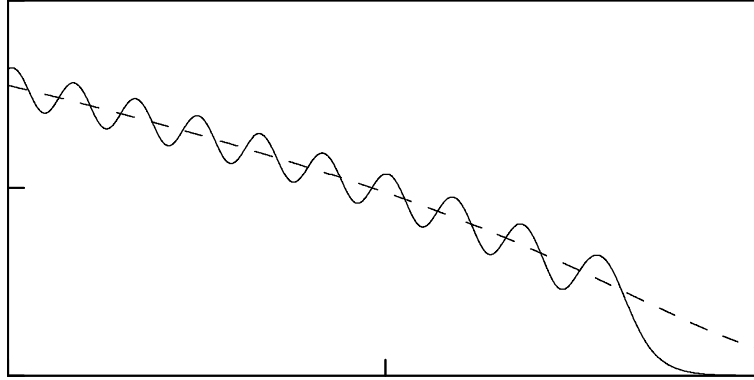


Figura 18. Curva de absorción para  $\Psi = 4$ ,  $\delta = -4$  y campo incidente  $e_0 = 15$ .

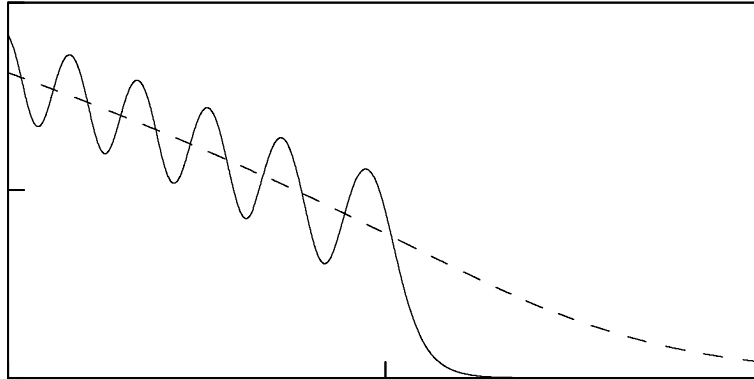


Figura 19. Curva de absorción para  $\Psi = 7$ ,  $\delta = -7$  y campo incidente  $e_0 = 15$ .

La explicación es que en la SVEA estamos suponiendo una sola onda que se propaga en la dirección del campo incidente mientras que en el caso real, al haber ese abrupto salto de la función dieléctrica (y por ende del

índice de refracción) en el paso de una región a otra, el campo se refleja e interfiere con el que se propaga hacia adelante produciendo esos máximos y mínimos. Es como si en ese punto apareciese un espejo inducido por el propio campo, por ello hablamos de autorreflexión (véase la figura 20).

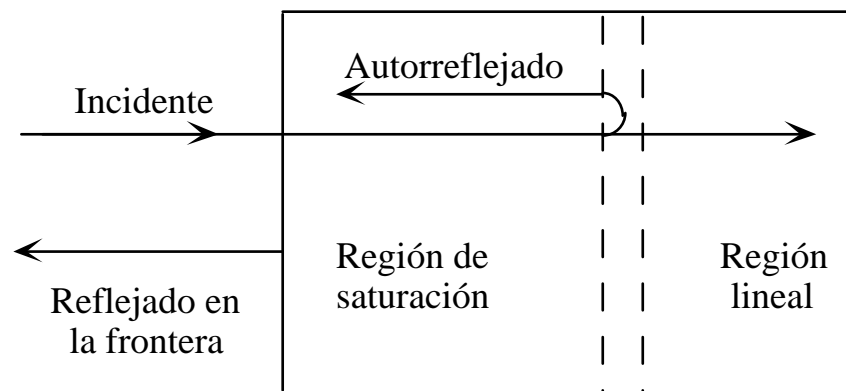


Figura 20. Esquema del fenómeno de autorreflexión inducida en el medio.

La variación del índice de refracción puede apreciarse claramente en la figura 21 en la que representamos el perfil del índice de refracción no lineal dentro del absorbente en el caso correspondiente a la figura 18. Se observa el salto abrupto en el punto de cambio de régimen que provoca la autorreflexión.

El campo total reflejado hacia el vacío será ahora el reflejado en la superficie frontera más la parte autorreflejada en el interior que traspase dicha superficie y que dependerá del campo incidente, siendo la reflectividad por tanto fuertemente dependiente de esta magnitud, como se ve en la figura 22, en la que representamos reflectividad frente a campo incidente en el caso  $\Psi = 4$ ,  $\delta = -4$ .

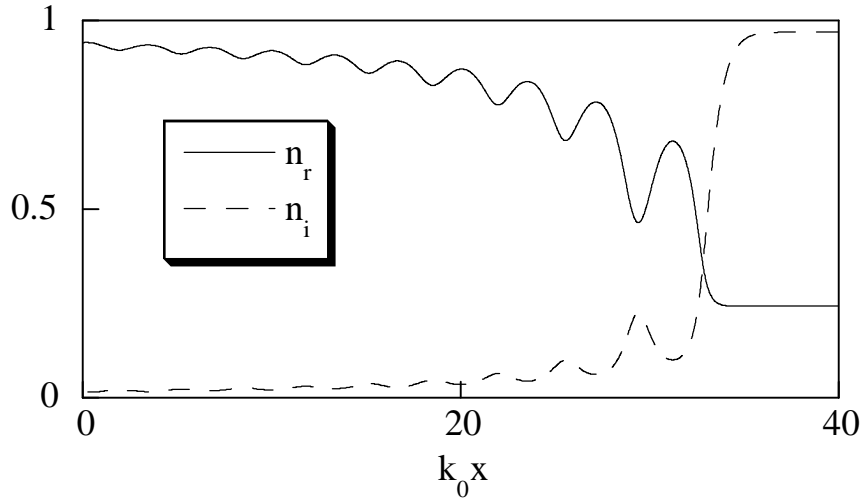


Fig 21. Perfiles de las partes real (línea continua) e imaginaria (discontinua) del índice de refracción no lineal dentro del medio para parámetros  $\Psi = 4$ ,  $\delta = -4$  y campo incidente  $e_0 = 15$ .

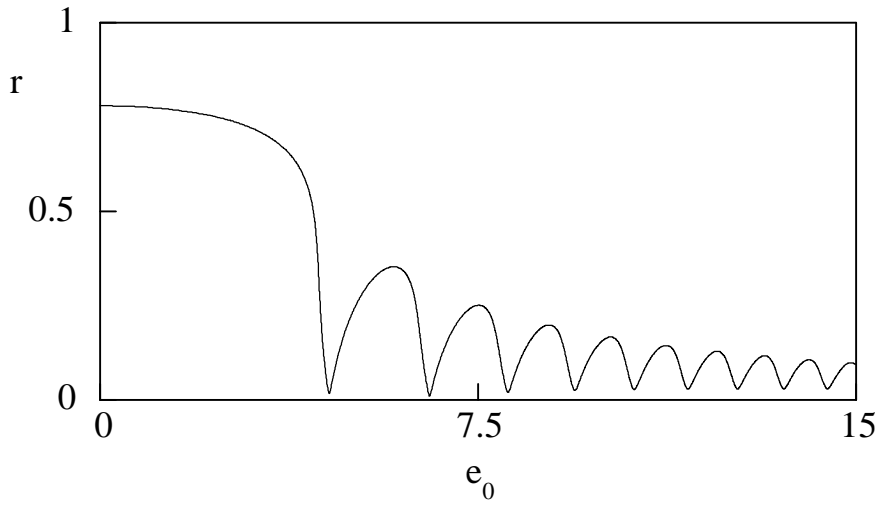


Figura 22. Coeficiente de reflexión frente a la amplitud del campo incidente en el caso  $\Psi = 4$ ,  $\delta = -4$ .

### 3.5. INFLUENCIA DE LA DESINTONÍA

En los ejemplos que hemos visto hasta ahora se ha escogido un valor concreto para la desintonía dentro de la banda prohibida polaritónica. Al depender el índice de refracción en la zona lineal fuertemente de este parámetro, también lo hará la autorreflexión e incluso fuera de la banda polaritónica ésta puede ser muy pequeña y recuperaremos la respuesta que nos daba la SVEA. En la figura 23 vemos cómo realmente ocurre esto: la modulación del campo es máxima en el centro de la banda polaritónica ( $\delta = \mathcal{P}$ ) mientras que según nos alejamos de ese punto se va haciendo menor y suficientemente lejos apenas es apreciable. Al coeficiente de reflexión le ocurre lo mismo como vemos en la figura 24; depende fuertemente del campo incidente en el centro de la banda prohibida, donde toma su valor más alto, y lejos de ahí su variación es mucho más suave.

### 3.6. RESPUESTA MULTIVALUADA

Cuando tenemos densidades de absorción muy altas obtenemos un resultado sorprendente: el coeficiente de reflexión puede tomar varios valores para un mismo campo incidente (figura 25).

Es evidente que la causa de esta respuesta anómala es la onda autorreflejada en la zona de cambio de régimen de propagación que provoca una modulación muy fuerte del campo en el material.

Para que obtengamos respuesta multivaluada es preciso que el cociente entre la parte imaginaria del índice de refracción lineal y su parte

real sea mucho mayor que la unidad.

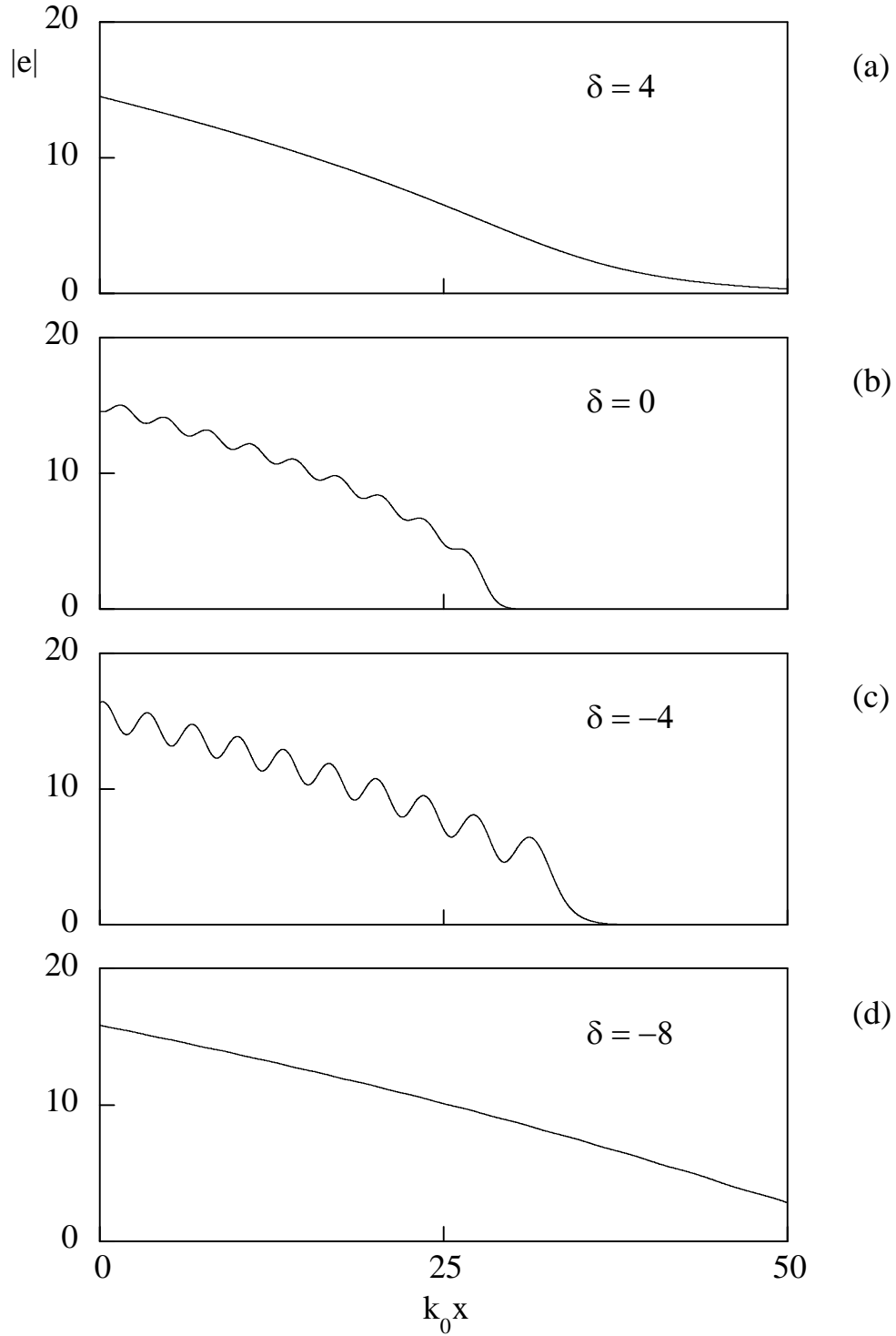


Figura 23. Comportamiento del campo para distintos valores de la desintonía en el caso  $\Psi = 4$ .

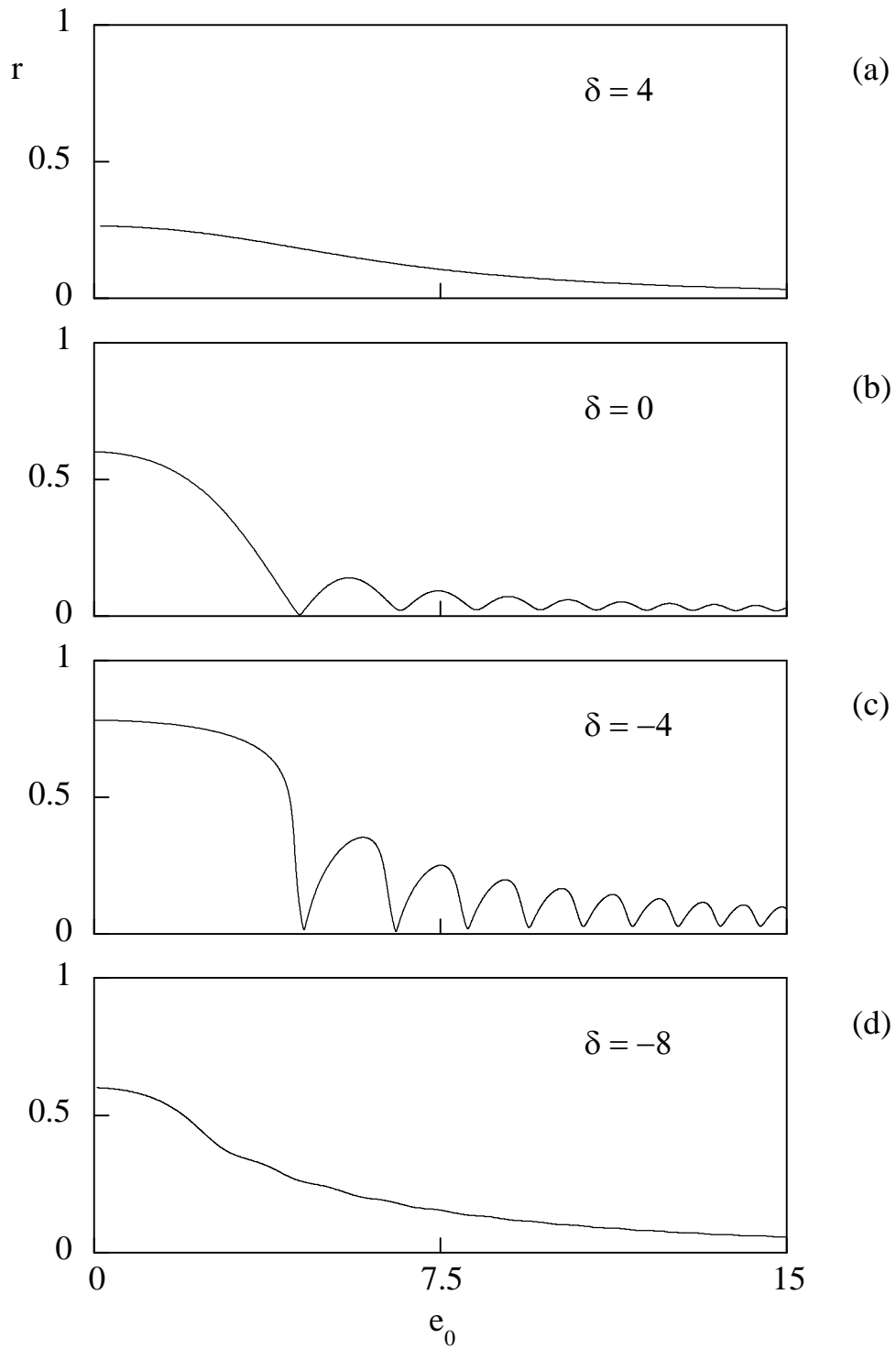


Figura 24. Coeficiente de reflexión en función de la amplitud del campo incidente para  $\Psi = 4$ .

Recordemos que ese cociente no es más que la razón entre la



longitud de onda del campo en el absorbente y la longitud de penetración de este.

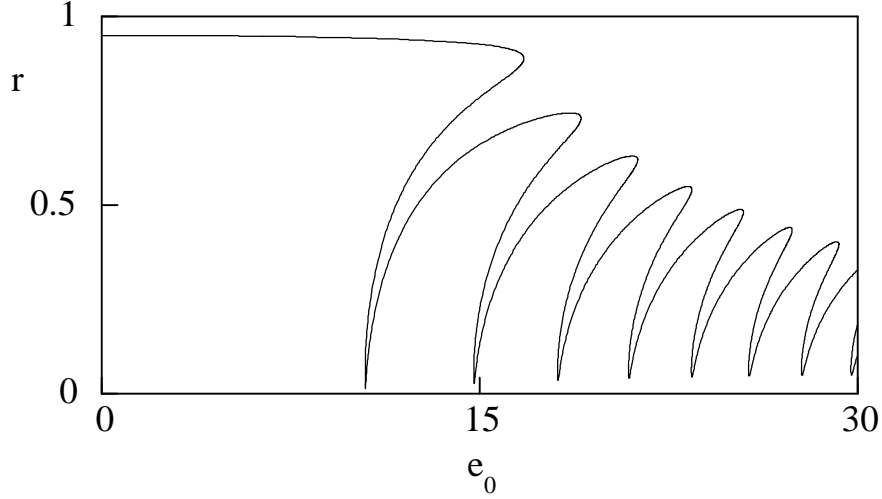


Figura 25. Coeficiente de reflexión en función del campo incidente para  $\Psi = 20$ ,  $\delta = -20$ .

En el caso de que varias de las posibles soluciones sean estables puede que nos aparezca algún fenómeno de biestabilidad o multiestabilidad óptica, pero esto no está garantizado. Más adelante lo veremos.

### 3.7. PARÁMETROS CRÍTICOS PARA LA RESPUESTA MULTIVALUADA

Como acabamos de explicar, la posibilidad de respuesta biestable de la reflectividad implica la existencia de varios perfiles del campo eléctrico dentro del absorbente para un valor fijo del campo incidente, y la inhomogeneidad espacial es crucial por lo que como ya está explicado no podemos usar una aproximación de campo medio o de envolvente

lentamente variable para resolver las ecuaciones. Sí que podemos usar el hecho de que la condición óptima en relación con la desintonía será que  $\delta = -\Psi$ , que era la mejor situación para alta reflexión en el caso lineal.

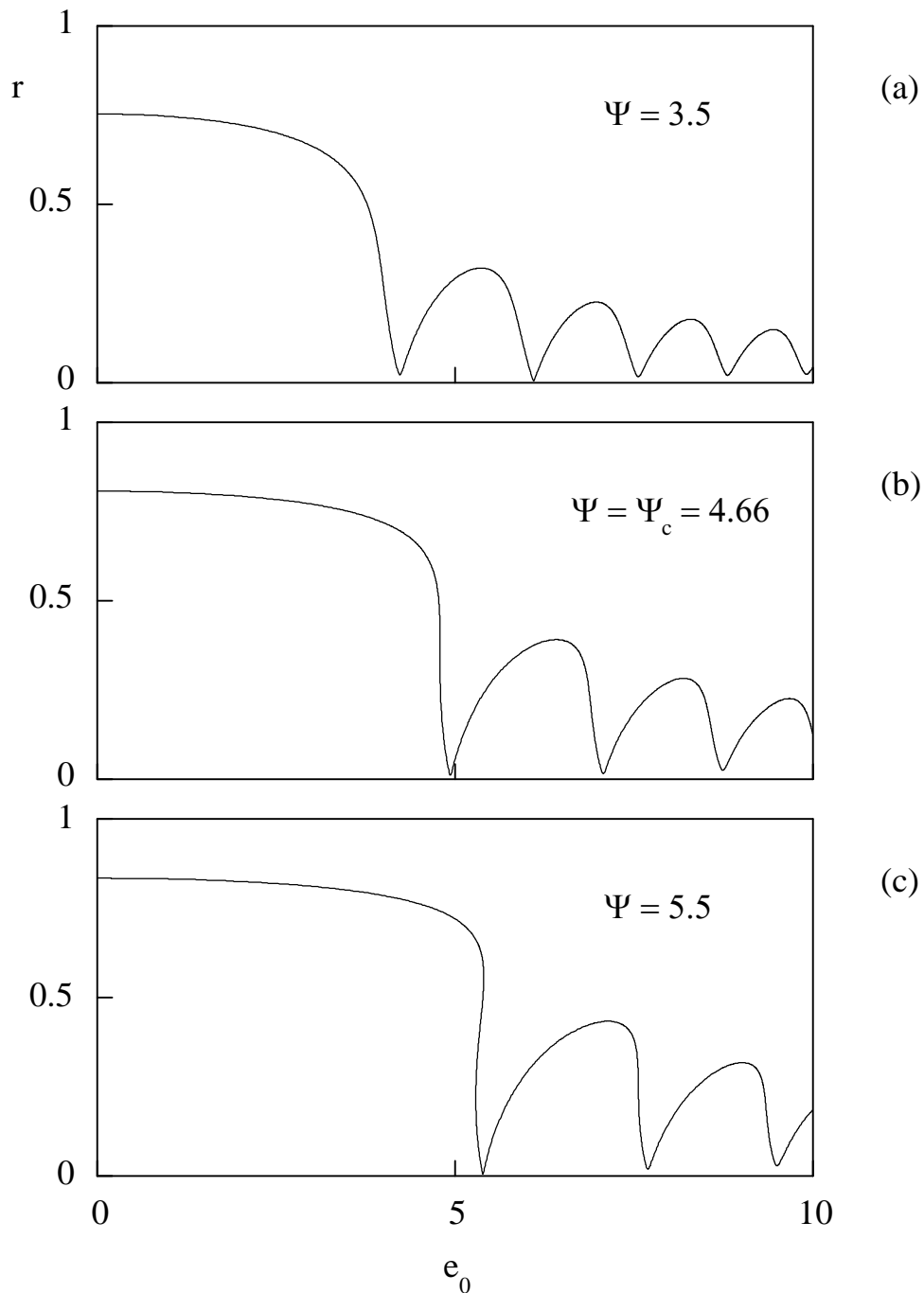


Figura 26. Coeficiente de reflexión en función del campo incidente en condiciones óptimas  $\delta = -\Psi$  para valores de  $\Psi$  por debajo del crítico (a), igual al crítico (b) y superior al crítico (c).

En primer lugar hemos realizado una serie de cálculos numéricos del coeficiente de reflexión utilizando la ecuación diferencial para observar detalladamente cuándo aparece la respuesta trivaluada que esperamos que dé lugar a biestabilidad.

Hemos encontrado [10] que el valor crítico de  $\Psi$  es  $\Psi_c = 4.66$ , como puede observarse en la figura 26. Si  $\Psi < \Psi_c$  no hay comportamiento trivaluado de la respuesta óptica para ningún valor de  $\delta$ . Para valores mayores lo hay en un intervalo de desintonías que depende de la densidad. En la figura 27 presentamos un ejemplo de una familia de curvas  $r(e_0, \delta)$  para un valor fijo de  $\Psi = 5.5 > \Psi_c$ . Como puede verse hay dos valores críticos de  $\delta$  que determinan los límites del intervalo de respuesta trivaluada y que en ese caso son  $\delta_c^{(1)} = -8.35$  y  $\delta_c^{(2)} = -3.43$ . Además se confirma que el caso en que la biestabilidad es más pronunciada es  $\delta = -\Psi = -5.5$ , como suponíamos.

Debemos prestar atención a un hecho en cierta forma sorprendente: hay valores del campo incidente para los cuales el coeficiente de reflexión es nulo. Eso significa que no hay onda reflejada a pesar de que inicialmente teníamos un reflector perfecto. Se nos ocurre una explicación sencilla: esto ocurre cuando la longitud de penetración del campo es un múltiplo entero de la longitud de onda  $\lambda$ . Tenemos entonces una interferencia destructiva en regiones del absorbente distantes  $\lambda/2$  una de otra debido a las oscilaciones en contrafase de la polarización eléctrica.

Para finalizar esta sección comentemos el comportamiento de  $r(e_0)$  cuando el parámetro  $\Psi$  es sensiblemente mayor que su valor crítico y hay dos nuevas características que no existían en el caso en que  $\Psi$  estaba próximo a  $\Psi_c$ .

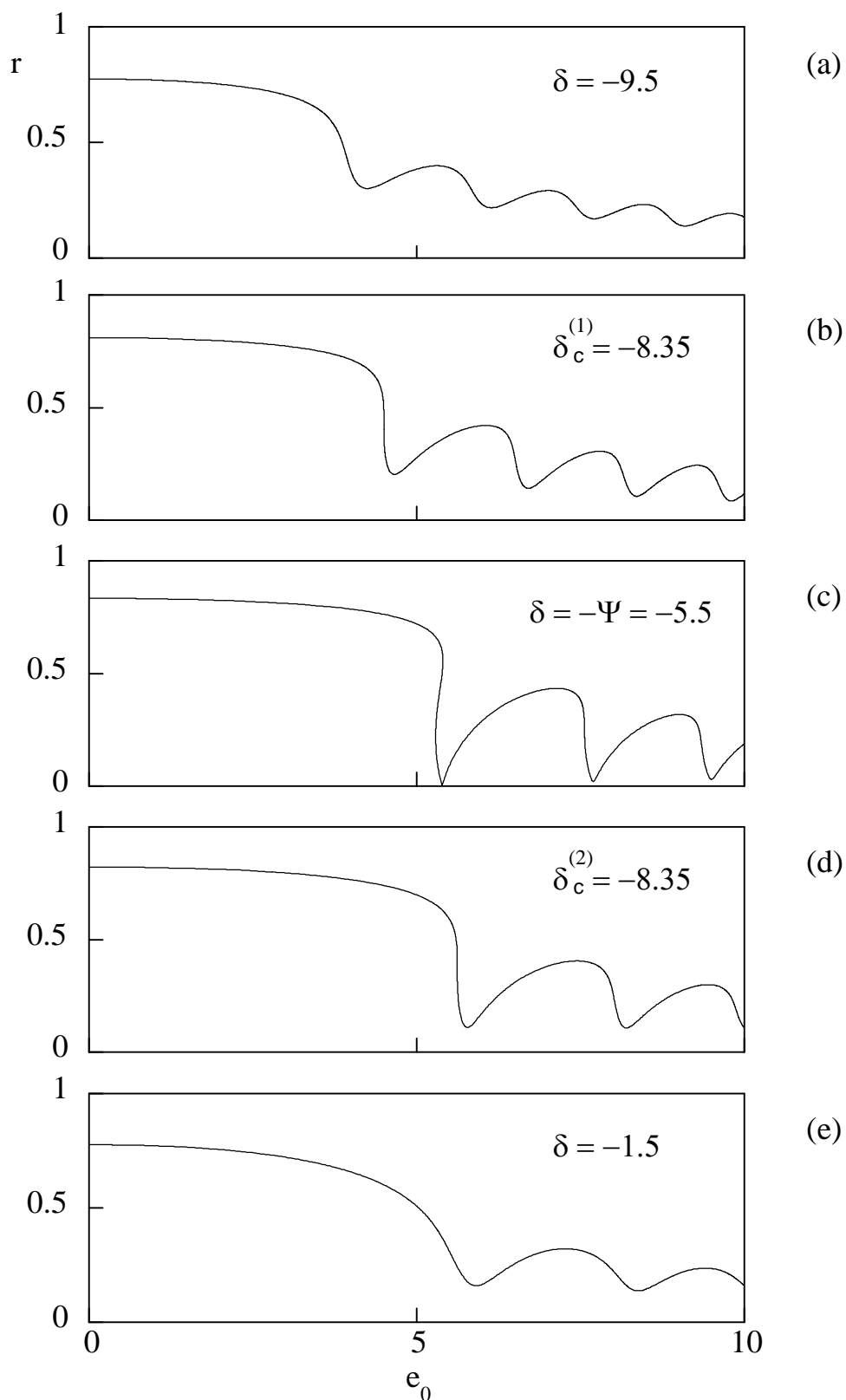


Figura 27. Variación del comportamiento del coeficiente de reflexión con la desintonía para un valor fijo  $\Psi = 5.5$ .

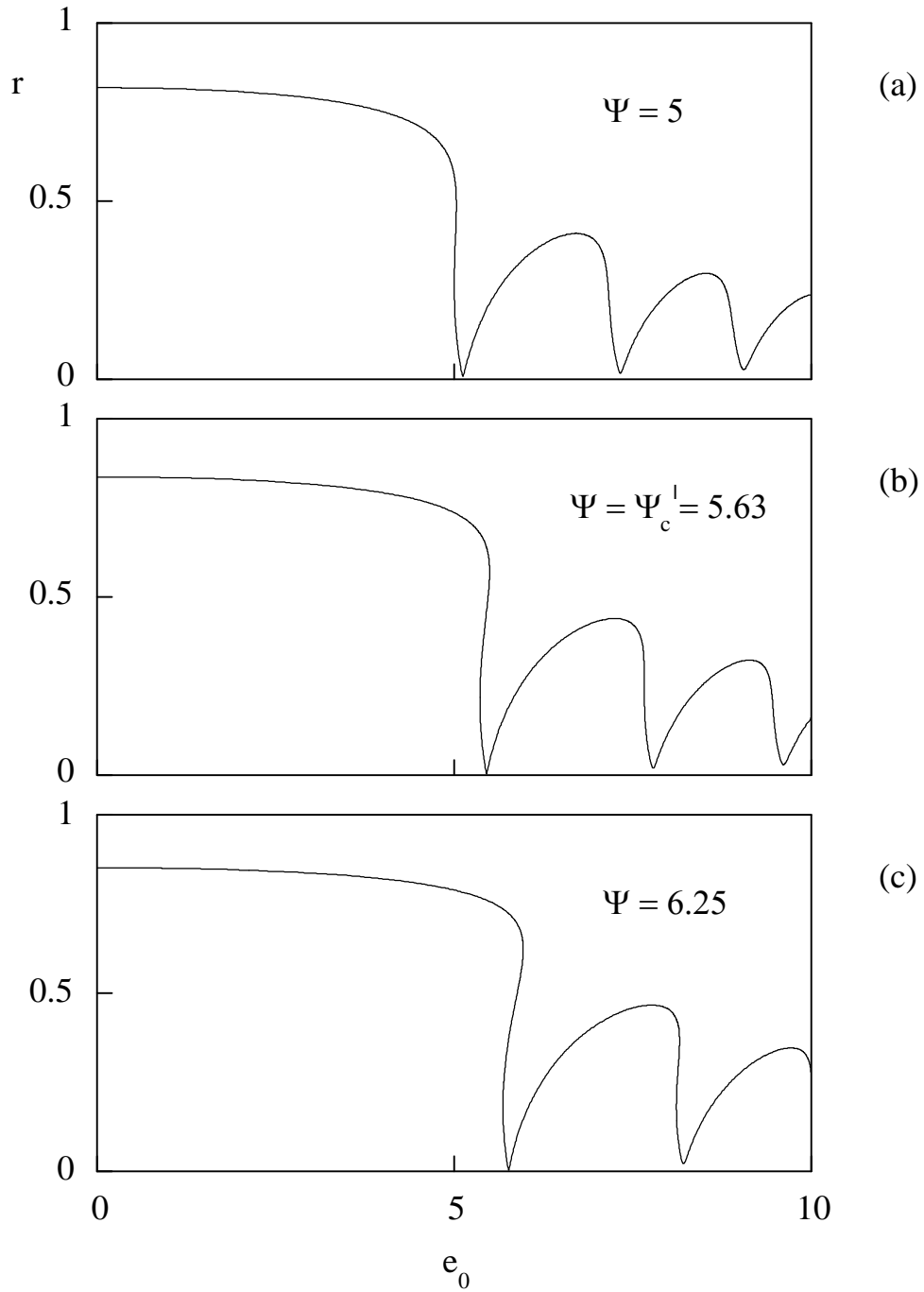


Figura 28. Aparición de una segunda región de reflexión multivaluada. El segundo valor crítico de  $\Psi$  es  $\Psi_c' = 5.63$ .

La primera es que hay dos o más regiones del campo incidente separadas de respuesta trivaluada. Esto ocurre para  $\Psi \geq \Psi_c' = 5.63$  como puede apreciarse en la figura 28. Para densidades mayores a esa puede

haber biestabilidad en al menos dos zonas del campo incidente para las que la reflexión disminuye bruscamente.

La segunda es la respuesta multivaluada (nos referimos a que el coeficiente de reflexión toma más de tres valores y podrían esperarse más de dos estables) que ya hemos mencionado, para  $\Psi$  mayor que  $\Psi_c^{multi} = 14.87$  como muestra la figura 29.

En la Fig. 30 podemos ver los diferentes perfiles del campo correspondientes al caso  $\Psi = 18$ ,  $\delta = -\Psi$  y  $e_0 = 15$  (el de la fig 29 c) para los cinco valores posibles del coeficiente de reflexión:  $r = 0.90$  (a),  $0.85$  (b),  $0.68$  (c),  $0.42$  (d) y  $0.31$ (e). Las soluciones en las ramas de pendiente negativa de dicho coeficiente se caracterizan por la pendiente positiva del campo interno cerca de la frontera. Esto nos hace pensar ya que serán inestables pues el material es absorbente e inicialmente el campo debería decrecer.

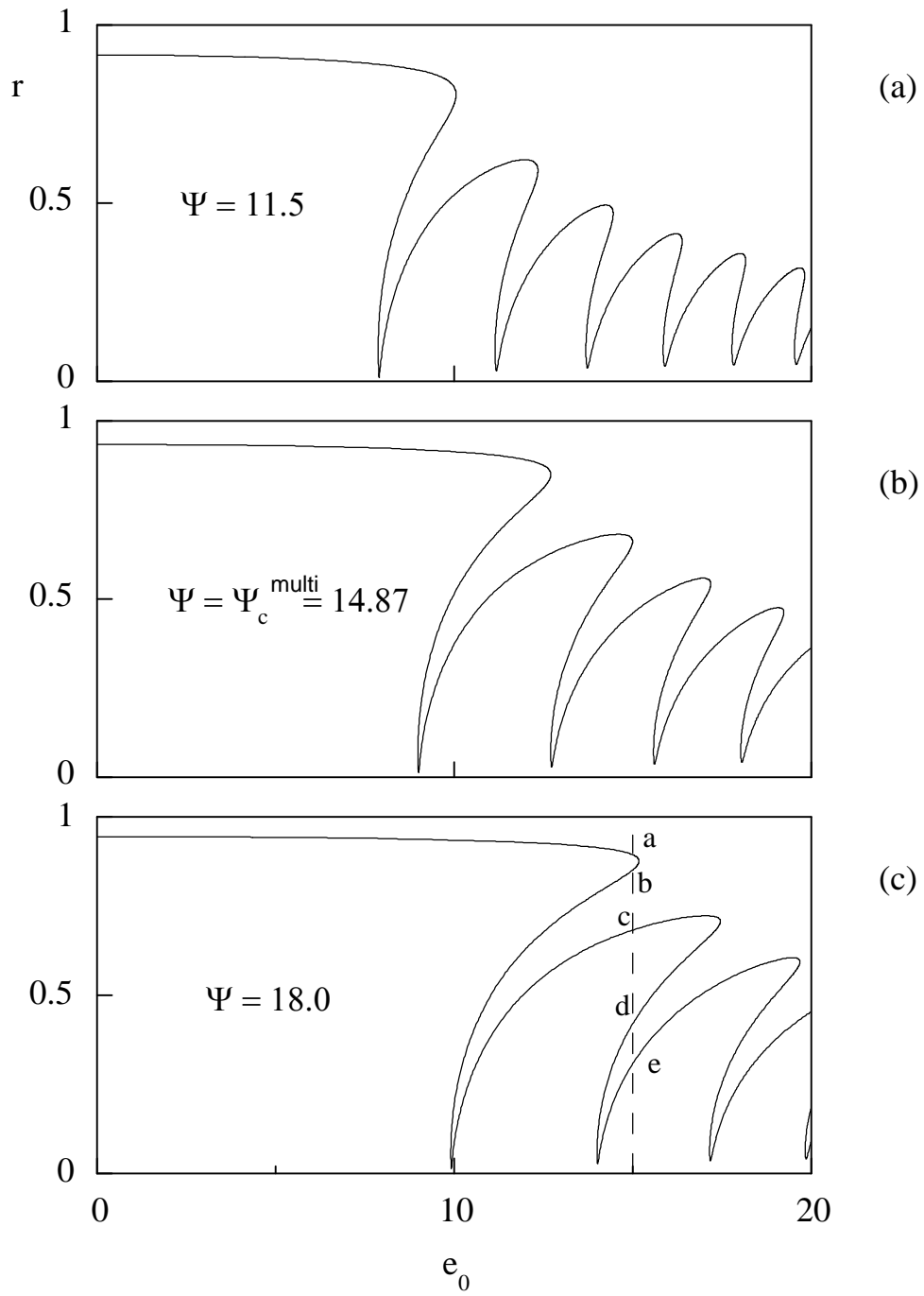


Figura 29. La respuesta multivaluada aparece para valores mayores que  $\Psi_c^{\text{multi}} = 14.87$ .

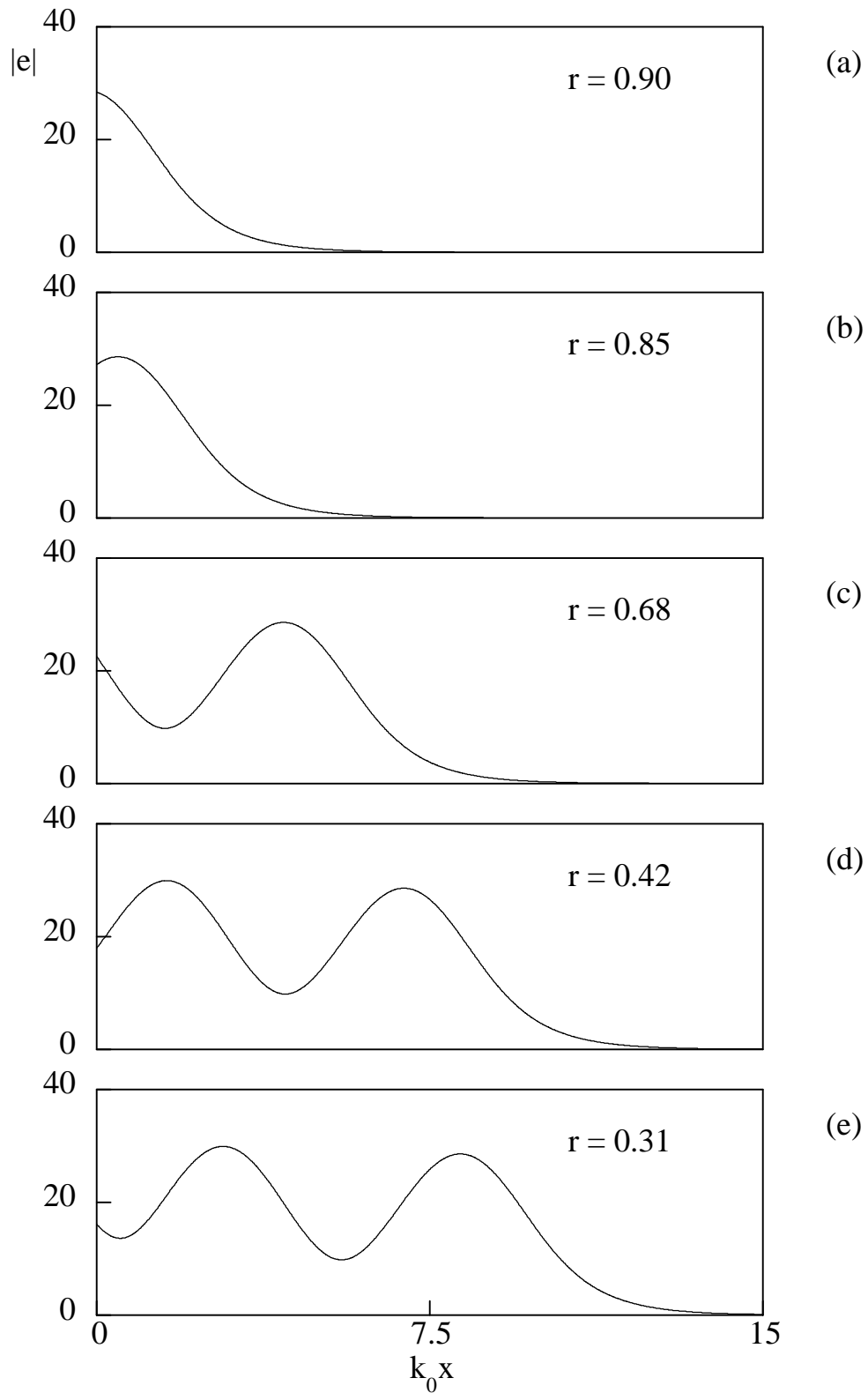


Figura 30. Perfiles de la amplitud del campo dentro del absorbente para los cinco valores posibles de la reflectividad correspondientes a un valor fijo del campo incidente  $e_0 = 15$  y parámetros  $\Psi = 18$ ,  $\delta = -\Psi$ .



## 4. PROPAGACIÓN EN RÉGIMEN NO ESTACIONARIO

La posibilidad de una respuesta multivaluada en la reflexión no implica automáticamente la aparición de fenómenos de biestabilidad o multiestabilidad óptica, puesto que pudiera ocurrir que de los estados posibles no fuera estable más que uno, pero es de esperar por analogía con otros sistemas similares (véanse [16, 17] para resúmenes sobre fenómenos de biestabilidad óptica) que al menos las ramas de pendiente positiva del coeficiente de reflexión respecto al campo incidente sean estables. Comprobaremos que efectivamente para ciertos valores de los parámetros existe biestabilidad: para un mismo campo incidente la reflexión puede tomar dos valores igualmente estables, pero para otros no ocurrirá esto.

La biestabilidad óptica es conocida desde hace bastante tiempo en dispositivos que presentan algún tipo de realimentación, como pueden ser absorbentes saturables situados en cavidades en anillo (donde el tratamiento es muy sencillo pues se puede usar la SVEA o incluso la aproximación del campo medio: suponer que la amplitud del campo en el absorbente es constante) o lineales, de tipo Fabry-Perot. La peculiaridad de nuestro sistema es que no existe tal realimentación (no hay espejos externos) o más bien, esta se autoinduce en el propio material por la acción del campo incidente.

Con objeto de observar la estabilidad de las distintas soluciones del campo eléctrico obtenidas por medio de la ecuación diferencial, hemos llevado a cabo cálculos de la evolución temporal del sistema con las

ecuaciones correspondientes. No tratamos de hacer un estudio exhaustivo de la estabilidad del sistema desde el punto de vista de la teoría de sistemas no lineales porque nuestro absorbente tiene infinitos grados de libertad y no es fácil reducir su dimensionalidad a unas pocas variables importantes que definan perfectamente su evolución. Sin embargo sí veremos los diferentes comportamientos dinámicos que aparecen en el sistema para distintos valores de los parámetros.

#### 4.1. EL PROBLEMA DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO. LA ECUACIÓN INTEGRAL

Si tratamos de resolver el sistema de ecuaciones de Maxwell-Bloch (apéndice B)

$$\frac{\partial W}{\partial t} = i \frac{\mu}{2\hbar} (ER^* - E^*R) - \frac{1}{T_1} (1 + W) \quad (4.1.a)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -i \frac{\mu E}{\hbar} W - \left( i\Delta + \frac{1}{T_2} \right) R \quad (4.1.b)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k_0^2 E = -4\pi k_0^2 \mu N_0 R \quad (4.1.c)$$

nos encontramos con la dificultad del problema numérico y por añadidura hemos de imponer unas condiciones de contorno realistas.

Las condiciones iniciales para polarización e inversión de población serán sencillas: antes de que aparezca el campo todos los átomos están desexcitados, en el nivel inferior y al no haber dipolos permanentes tendremos

$$W(x, 0) = -1, x \in (0, \infty) \quad (4.2.a)$$

$$R(x, 0) = 0, x \in (0, \infty) \quad (4.2.b)$$

Fuera del absorbente está el vacío y la polarización es idénticamente nula siempre.

El problema se plantea al imponer condiciones de frontera al campo eléctrico. Ya vimos que en el caso estacionario había que recurrir a la técnica de la integración "hacia atrás" suponiendo que el campo se absorbía, pero en este caso no podemos imponer una condición para el campo eléctrico en todo el espacio -al haber eliminado las derivadas temporales en la ecuación de ondas mediante la SVEA hemos perdido la causalidad, todas las interacciones son instantáneas y el campo sigue adiabáticamente a la polarización eléctrica, y no podemos pensar en un pulso inicialmente propagándose hacia el absorbente y reflejándose y absorbiéndose al llegar a él- pues fuera del absorbente tendremos tanto campo incidente como reflejado. La solución viene de la mano del formalismo de ecuaciones integrales.

Puede comprobarse (Apéndice C) que la ecuación de Helmholtz es equivalente a la ecuación integral

$$E(x, t) = E_i(x, t) + 2\pi i k_0 \mu N_0 \int_0^\infty dx' \exp(ik_0|x - x'|) R(x', t) \quad (4.3)$$

donde  $E_i(x, t)$  es la amplitud lentamente variable en el tiempo del campo incidente,

$$E_i(x, t) = E_{i0}(t) e^{ik_0 x} \quad (4.4)$$

La forma integral expresa el principio de superposición: en un punto  $x$  el campo eléctrico es la suma del campo incidente y de los campos secundarios producidos en todos los otros  $x'$ . Esta ecuación tiene la enorme ventaja de incluir automáticamente las condiciones de contorno. El valor del campo en la frontera es

$$E(0, t) = E_{i0}(t) + 2\pi i k_0 \mu N_0 \int_0^\infty dx' \exp(ik_0 x') R(x', t) \quad (4.5)$$

y la amplitud del campo reflejado será

$$E_r(t) = E_0(0, t) - E_{i0}(t) = 2\pi i k_0 \mu N_0 \int_0^\infty dx' \exp(ik_0 x') R(x', t) \quad (4.6)$$

De forma que conociendo la distribución espacial de la polarización eléctrica tendremos la reflexión.

Para llevar a cabo los cálculos conviene renormalizar también las variables temporales. Definiendo

$$\tau = \frac{t}{T_2} \quad (4.7.a)$$

$$\tau_1 = \frac{T_1}{T_2} \quad (4.7.b)$$

tendremos

$$\dot{W} = \frac{i}{2} (eR^* - e^* R) - \frac{1}{\tau_1} (1 + W) \quad (4.8.a)$$

$$\dot{R} = -ieW - (i\delta + 1)R \quad (4.8.b)$$

$$e(\xi, \tau) = e_i(\xi, \tau) + i\Psi \int_0^\infty d\xi' \exp(i|\xi - \xi'|) R(\xi', \tau) \quad (4.8.c)$$

donde  $e_i(\xi, \tau) = e_{i0}(\tau)e^{i\xi} = \mu/T_2\hbar E_{i0}(\tau)e^{i\xi}$  y  $\Psi$  y  $\delta$  son ya conocidos.

## 4.2. RESULTADOS DEL CÁLCULO NUMÉRICO

Para desarrollar los cálculos numéricos debemos discretizar el sistema. Es imposible trabajar con un absorbente infinito así que tomaremos uno de longitud  $L$  suficientemente grande como para que el campo se anule antes de llegar a esa segunda frontera, ya que si no tendríamos ahí reflexión y el problema sería completamente distinto al caso semiinfinito. En la práctica para un absorbente denso basta con que  $L$  sea mayor que unas pocas longitudes de onda pues la absorción se produce antes.

La resolución de las ecuaciones diferenciales (4.8.a, 4.8.b) se realizó con un método Runge-Kutta de cuarto orden [27] con un paso temporal suficientemente bajo como para que los resultados no dependieran de él y se comprobó su validez en varios casos con un método de tipo predictor-corrector. En cuanto a la ecuación integral acoplada (4.8.c) se utilizó un sencillo método de trapecios con pequeño paso espacial, suficiente para describir adecuadamente el campo oscilante (en concreto al menos cincuenta puntos en cada longitud de onda). El método se modificó utilizando una aproximación debida al doctor Luis Plaja Rustein para propagar la solución desde la frontera hacia adentro que da muy buenos resultados y acelera considerablemente los cálculos. Por último, para el campo incidente monocromático utilizamos un

periodo transitorio durante el cual el campo crecía linealmente hasta alcanzar un valor final estacionario. Sin embargo vimos que la forma y duración del transitorio no influía para nada en el resultado final en el caso de llegarse a soluciones estables.

#### 4.2.1. Ciclo de histéresis óptica

En primer lugar tratamos de obtener un ciclo de histéresis cuando el coeficiente de reflexión es multivaluado para el mismo campo incidente con  $\Psi$  cerca de  $\Psi_c$ . La figura 31 demuestra esa posibilidad para  $\Psi = 7$ .

Para obtener esos resultados se operó de dos formas distintas. En el primer caso (línea continua) variamos el campo a saltos esperando en cada punto a que el sistema se estabilizase, es una solución "casiestacionaria". La curva discontinua se obtuvo usando un campo linealmente variable  $e_0 = v\tau$  con una velocidad de barrido constante  $v = 0.01$  para aumentar y disminuir el campo. Observando la figura 31 puede concluirse que para los parámetros utilizados es posible un ciclo de histéresis. Este hecho, sospechado desde los primeros trabajos de Luis Roso [7, 8] se confirma ahora por vez primera. Además hay una total correspondencia entre el resultado estacionario obtenido con la ecuación diferencial (línea de puntos) y la solución "casiestacionaria" excepto por la rama de pendiente negativa de la reflectividad que resulta ser inestable como cabía esperar.

El valor de la velocidad de variación del campo es comparable con los tiempos propios de relajación del sistema y por eso la correspondiente curva discontinua presenta oscilaciones cerca de los puntos críticos del

ciclo, esto es, esos puntos se alcanzan de forma no monótona, son lo que en el lenguaje habitual de los sistemas no lineales se llama focos, estables en este caso. El ciclo es más ancho que el teórico ya que el sistema tarda un período transitorio en alcanzar el nuevo estado estacionario.

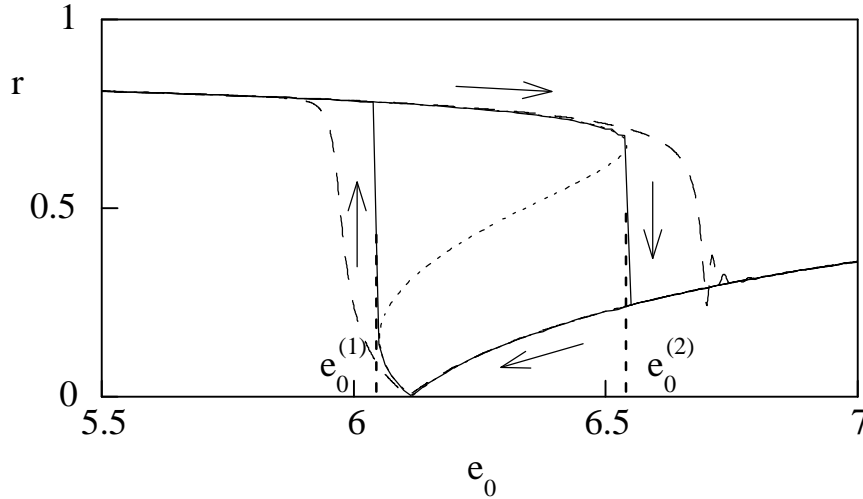


Figura 31. Ciclo de histéresis óptica para parámetros  $\Psi = 7$ ,  $\delta = -7$ . La curva en línea continua corresponde a la solución casiestacionaria, la de trazos se calcula variando el campo incidente con una velocidad  $v = 0.01$ . La línea de puntos representa la solución estacionaria obtenida con la ecuación diferencial.

En la figura 32 mostramos los perfiles del valor absoluto del campo interno correspondientes a campos incidentes justo al lado de los valores críticos en que se produce el salto de una rama a la otra y que corresponden en este caso a  $e_0^{(1)} = 6.05$  y  $e_0^{(2)} = 6.53$ .

Las gráficas nos enseñan que los perfiles que corresponden a pendientes positivas del campo en las cercanías de la frontera se hacen inestables forzando al sistema a saltar a la otra rama. Como hemos dicho antes, este tipo de perfiles corresponde a la rama de pendiente negativa del coeficiente de reflexión que es absolutamente inestable.

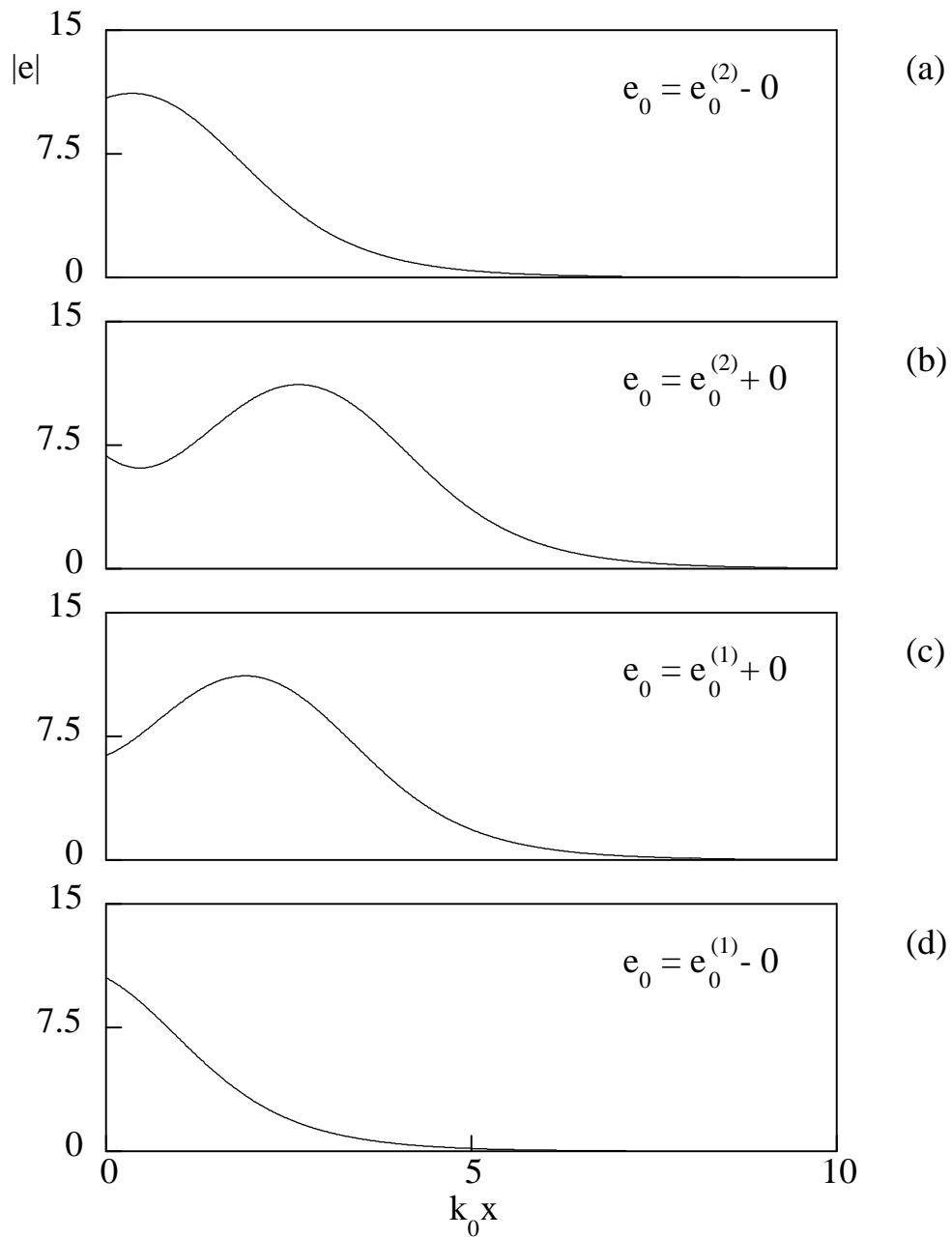


Figura 32. Perfiles de la amplitud del campo eléctrico dentro del absorbente cerca de los valores críticos del campo incidente  $e_0^{(1)} = 6.05$  y  $e_0^{(2)} = 6.53$ .  $\Psi = -\delta = 7$  (ver figura anterior).

Si incrementamos el valor de la densidad hasta  $\Psi = 10$  vemos que sigue siendo posible un ciclo de histéresis también en este caso (fig. 33)



pero una parte de la rama inferior correspondiente a los valores mayores del campo incidente exhibe una inestabilidad de tipo autooscilación aunque no se aprecie claramente en la gráfica (véase la siguiente sección). Una figura muy parecida puede encontrarse en [28] referente a la biestabilidad de un láser multimodo en una cavidad de tipo Fabry-Perot. La regla que deducimos es que a mayor densidad, más grande es la parte inestable de esa rama inferior.

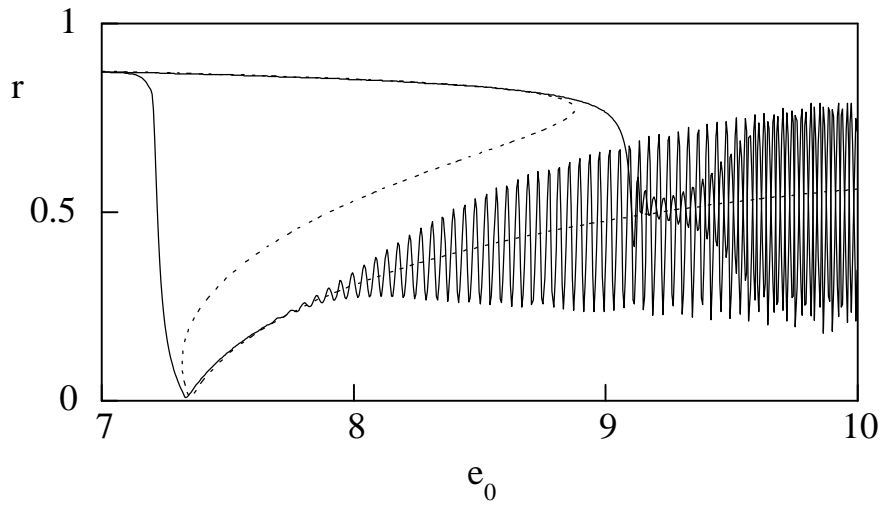


Figura 33. Ciclo de histéresis para parámetros  $\Psi = 10$ ,  $\delta = -10$ . La línea continua se obtuvo variando el campo incidente linealmente con velocidad de barrido  $v = 0.02$ . La línea de puntos representa la solución estacionaria para los mismos parámetros.

#### 4.2.2. Autooscilaciones

En la figura 34b tenemos una figura parecida a la discutida más arriba para los mismos parámetros pero con un rango de variación del campo incidente más amplio que cubre la posibilidad de varias áreas de biestabilidad de la reflexión. Se utilizó una velocidad de barrido de 0.02

para calcularla. Para comparar hemos dibujado en la fig. 34a el resultado estacionario análogo con la ayuda de la ecuación diferencial.

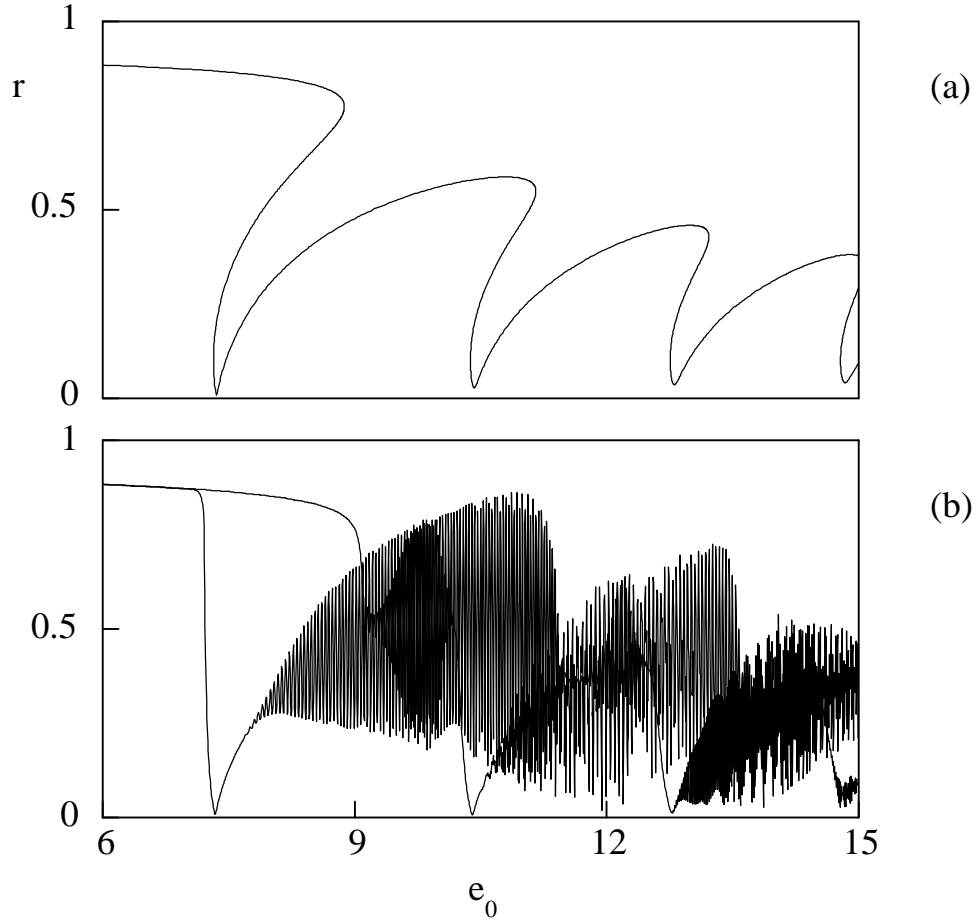


Figura 34. Solución estacionaria (a) y ciclos de histéresis (b) para las diferentes regiones de respuesta multivaluada con los mismos parámetros que en la figura anterior.

Como podemos observar en la figura, para el conjunto de parámetros que hemos seleccionado ( $\Psi = 10$ ,  $\delta = -\Psi$ ) la única rama estable del coeficiente de reflexión es la superior del primer ciclo de histéresis. El resto son, al menos en parte, inestables.

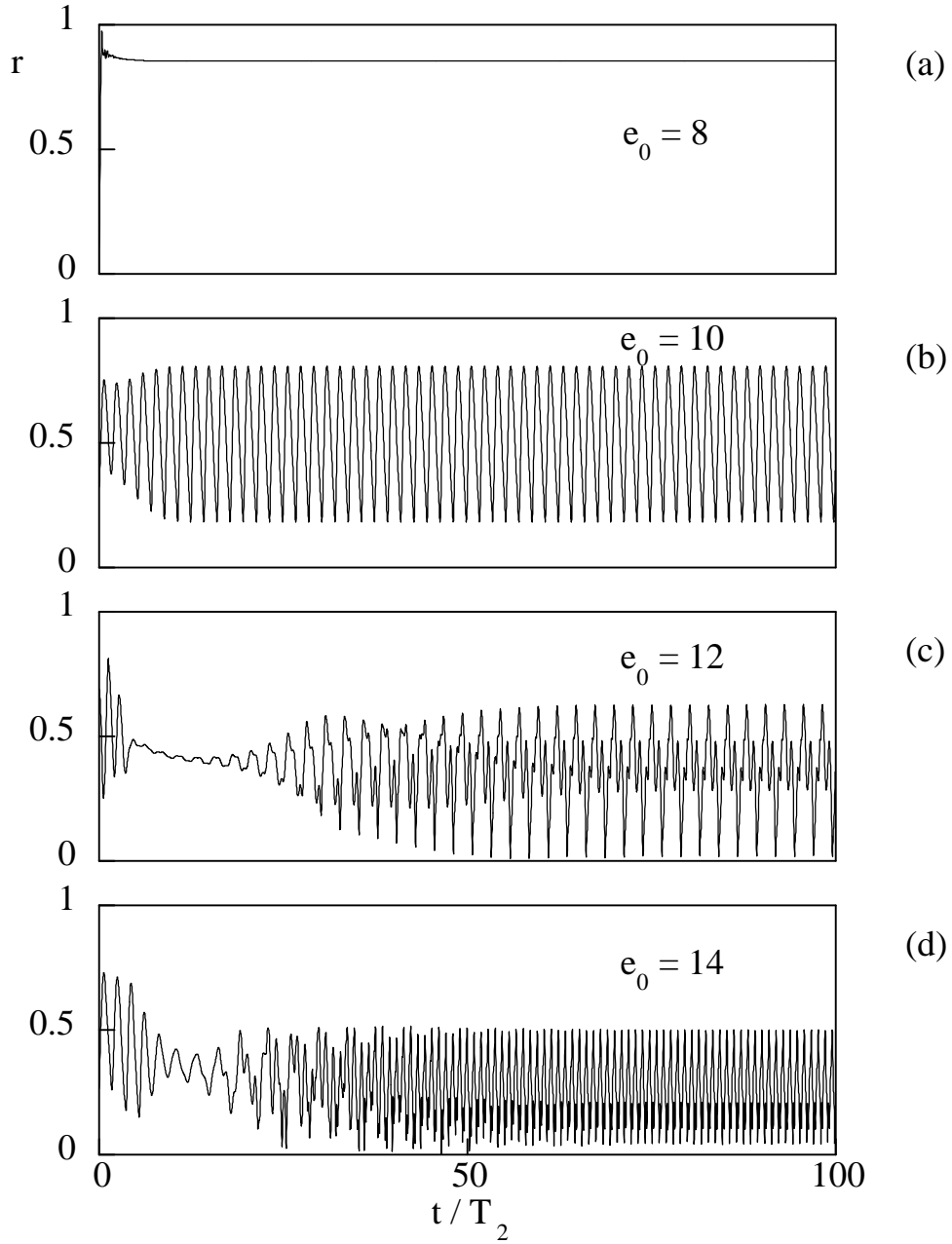


Figura 35. Autooscilación del coeficiente de reflexión para valores fijos del campo incidente. Las figuras están calculadas aumentando el campo a saltos y esperando hasta alcanzar un comportamiento estable. Los parámetros son idénticos a los de las anteriores figuras ( $\Psi=10$ ,  $\delta=-\Psi$ ).

Para descubrir la naturaleza de estas inestabilidades y ver si

siempre son oscilatorias o hay posibilidad de que aparezcan comportamientos más complejos, por ejemplo de tipo caótico, hemos realizado una serie de cálculos, algunos de los cuales pueden verse en la figura 35. Los cálculos están hechos con los parámetros anteriores ( $\Psi = 10$ ,  $\delta = -\Psi$ ) aumentando el campo a saltos y esperando hasta que las oscilaciones se estabilicen.

El único tipo de inestabilidades que hemos observado han sido oscilaciones, relacionadas tal vez con la existencia de ciclos límite entre las diferentes soluciones estacionarias. Su periodo como puede verse depende del campo incidente, pero siempre es del orden del tiempo de relajación de la polarización eléctrica  $T_2$ . Podemos decir también que las partes más inestables de la curva son las próximas a los máximos locales de reflexión.

Para asegurarnos del carácter oscilatorio de estas inestabilidades realizamos la transformada de Fourier de las series temporales del coeficiente de reflexión  $F(r)$  una vez superado el transitorio. El método de análisis espectral es bastante común en el estudio de este tipo de fenómenos y nos puede ofrecer bastante información al respecto [29, 30]. Los resultados para valores del campo incidente  $e_0 = 10$ ,  $e_0 = 12$  y  $e_0 = 14$  pueden verse en la siguiente figura (las frecuencias  $f$  tienen unidades de  $1/T_2$ ).

Como puede apreciarse, en todos los casos hay una frecuencia principal -  $f = 0.56$  en el caso (a),  $f = 0.39$  en el (b) y  $f = 1.05$  en el (c)- y contribuciones en múltiplos enteros (armónicos) de dichas frecuencias. Las señales son por lo tanto oscilatorias como decíamos.

En la figura 37 podemos ver los perfiles del campo en los momentos en que la reflectividad alcanza sus límites máximo y mínimo en la oscilación para amplitud del campo incidente  $e_0 = 10$ . Curiosamente

para ese valor del campo la ecuación diferencial nos da una única solución estacionaria, que como puede observarse no se corresponde con ninguno de los límites.

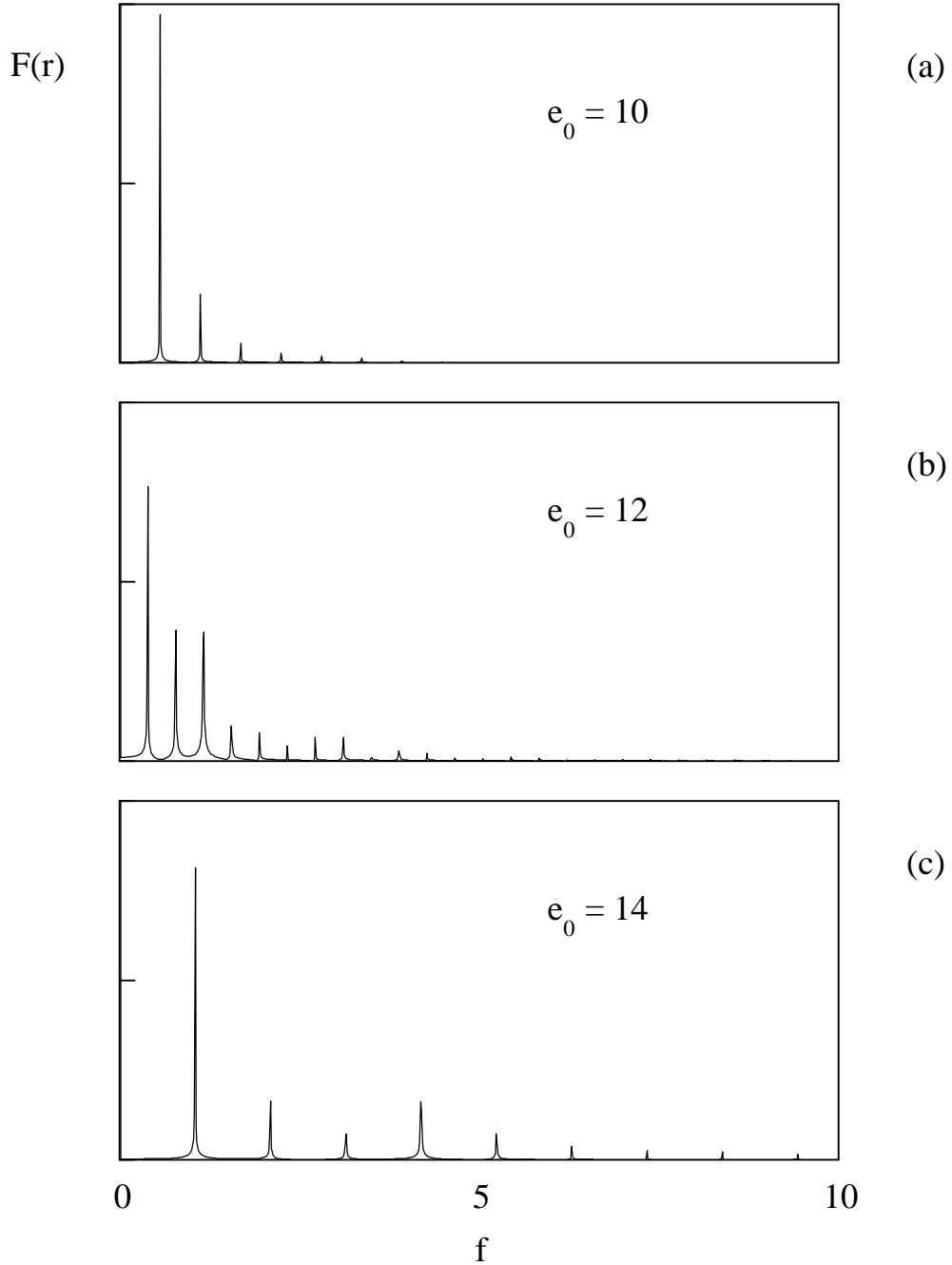


Figura 36. Transformadas de Fourier de la reflectividad en el caso  $\Psi = 10$ ,  $\delta = -\Psi$  para distintos valores del campo incidente.

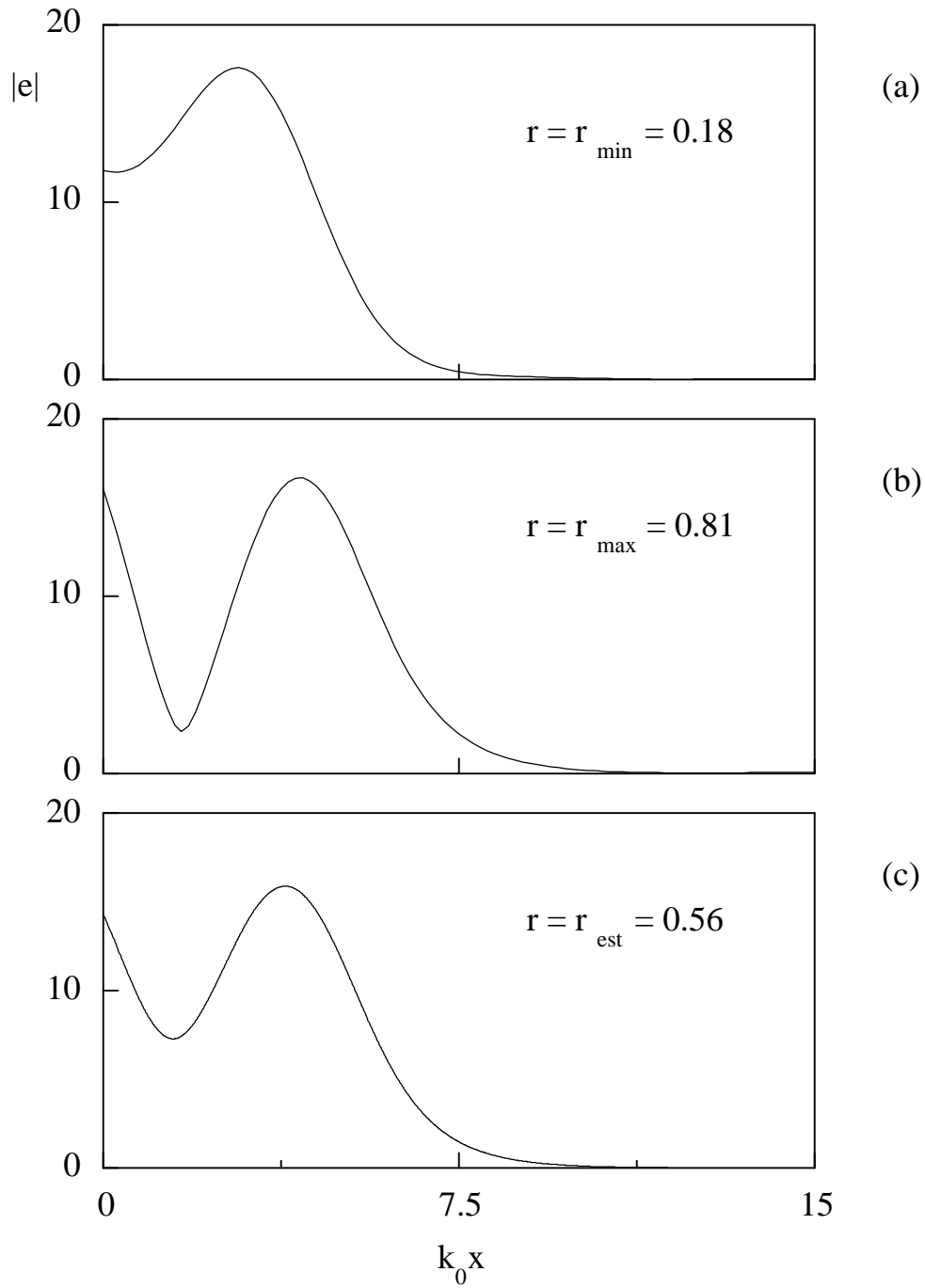


Figura 37. Perfiles del campo dentro del absorbente para los valores límite mínimo (a) y máximo (b) de oscilación del coeficiente de reflexión. la gráfica (c) representa la solución estacionaria teórica.

Para ver si son posibles otros comportamientos dinámicos realizamos estudios similares con otros parámetros más altos (mayor

densidad y campos incidentes más grandes).

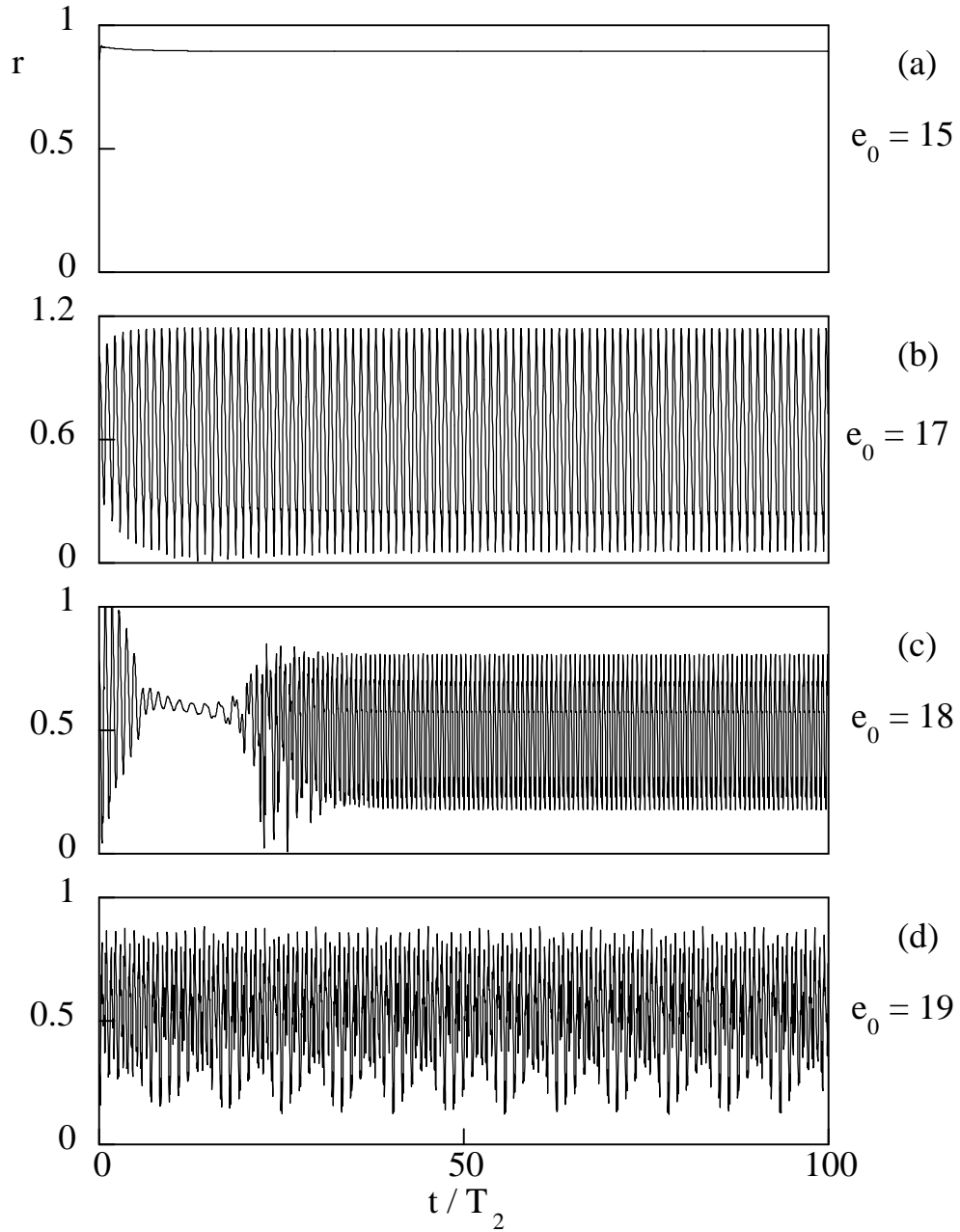


Figura 38. Evolución del coeficiente de reflexión a lo largo del tiempo según aumentamos el campo incidente de forma discreta para parámetros  $\Psi = 18$ ,  $\delta = -\Psi$ .

En las figuras 38 y 39 puede verse lo que ocurre para  $\Psi = 18$ ,

$\delta = -\Psi$ . En el primer caso repetimos lo hecho para los parámetros anteriores aumentando el campo desde 15 a 19. En el segundo partimos de campo 19 y lo reducimos hasta 15 realizando el camino inverso.

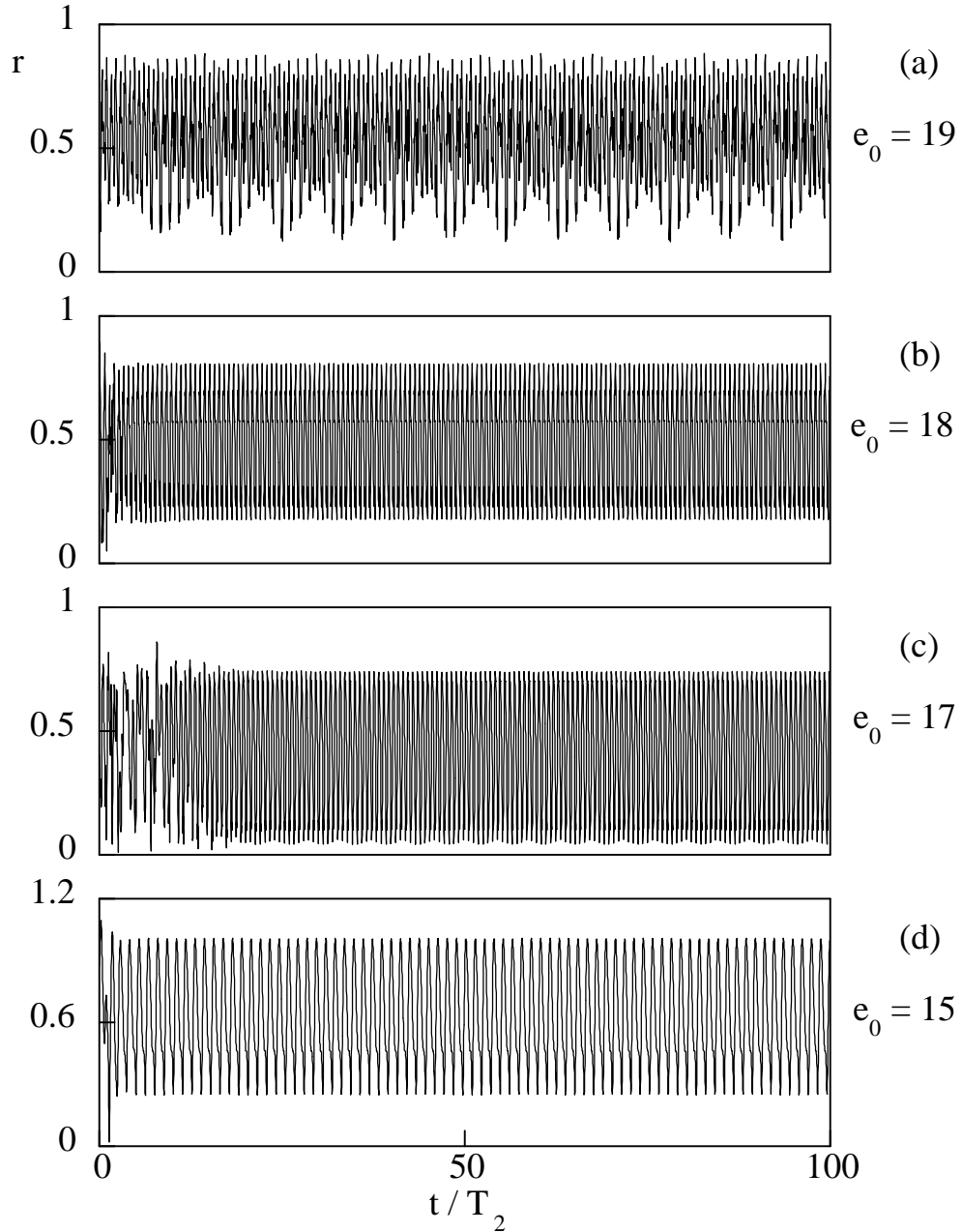


Figura 39. En este caso estudiamos la evolución de la reflectividad para los mismos parámetros del absorbente pero disminuyendo la amplitud del campo eléctrico incidente.



Hay varias cosas que nos llaman la atención. En primer lugar, el comportamiento del absorbente no es el mismo cuando el campo crece que cuando disminuye (podemos apreciarlo para valores del campo incidente  $e_0 = 15$  y  $e_0 = 17$ ). Esto no debe sorprendernos pues sabemos que existen varias posibles soluciones estacionarias en esos casos correspondientes a ramas distintas, que como vemos son inestables.

También es en cierto modo extraño el encontrar en algún caso valores de la reflectividad por encima de uno. Desde luego esto es imposible de forma estacionaria (significaría que se refleja más de lo que llega, esto es, aumentaría la energía en el absorbente) pero perfectamente razonable en períodos transitorios puesto que al haber autorreflexión en el interior del medio la energía puede reagruparse y en ciertos momentos reflejarse más de lo que llega.

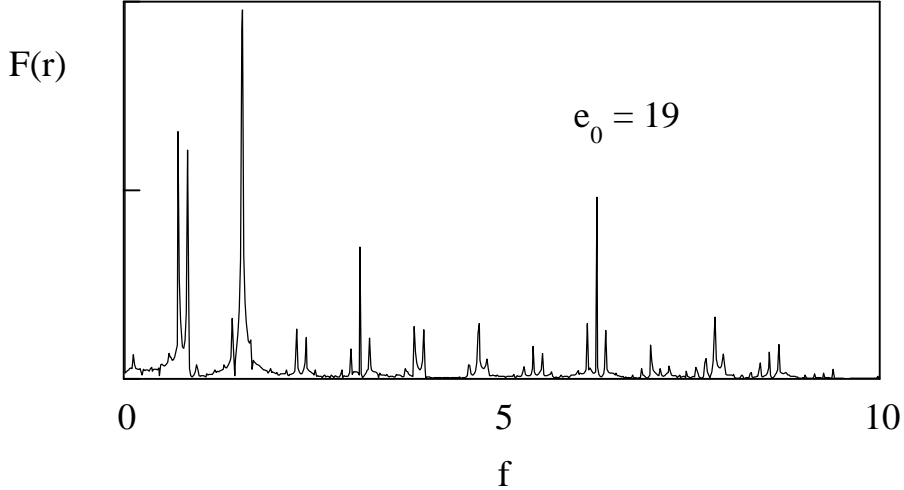


Figura 40. Transformada de Fourier de la evolución temporal de la reflectividad para campo incidente  $e_0 = 19$  y parámetros del medio  $\Psi = 18$ ,  $\delta = -\Psi$ .

Por último el carácter oscilatorio de las inestabilidades es bastante evidente (y se puede comprobar mediante la transformada de Fourier)

salvo para el valor máximo del campo incidente. Por ello detallamos en la figura anterior el espectro de la serie temporal correspondiente a  $e_0 = 19$ . (En los demás casos es muy similar a los vistos anteriormente para densidad más baja, pero lógicamente con frecuencias diferentes).

Observamos que la transformada de Fourier tiene máximos en frecuencias múltiplo de una básica ( $f_1 \approx 0.8$ ) pero además hay contribuciones apreciables en otras frecuencias colaterales que antes no aparecían  $f \approx Nf_1 \pm f_2$  con  $f_2 \approx 0.12$ . No puede hablarse de un espectro continuo, que sería indicio de comportamiento caótico, sino de un fenómeno de casiperiodicidad, que no es nuevo en estos sistemas [29, 30].

#### 4.2.3. Comportamiento caótico

Dado que la casiperiodicidad es una de las posibles rutas hacia el caos, podemos esperar que si aumentamos todavía más nuestro parámetro de control, que es la amplitud del campo incidente, encontraremos comportamientos irregulares.

Hemos hecho esto y podemos observar los resultados en las siguientes figuras. La primera muestra la evolución temporal del coeficiente de reflexión según crece el campo externo. A diferencia de las anteriores hemos omitido en las gráficas un tiempo transitorio prudencial (cincuenta unidades). Lo primero que se observa es que comienzan a aparecer irregularidades a partir de  $e_0 = 19.5$  manteniendo aún cierto carácter oscilatorio. Para campo externo  $e_0 = 20$  la inestabilidad es ya evidente, pero aparece un nuevo dibujo periódico si lo aumentamos en una unidad.

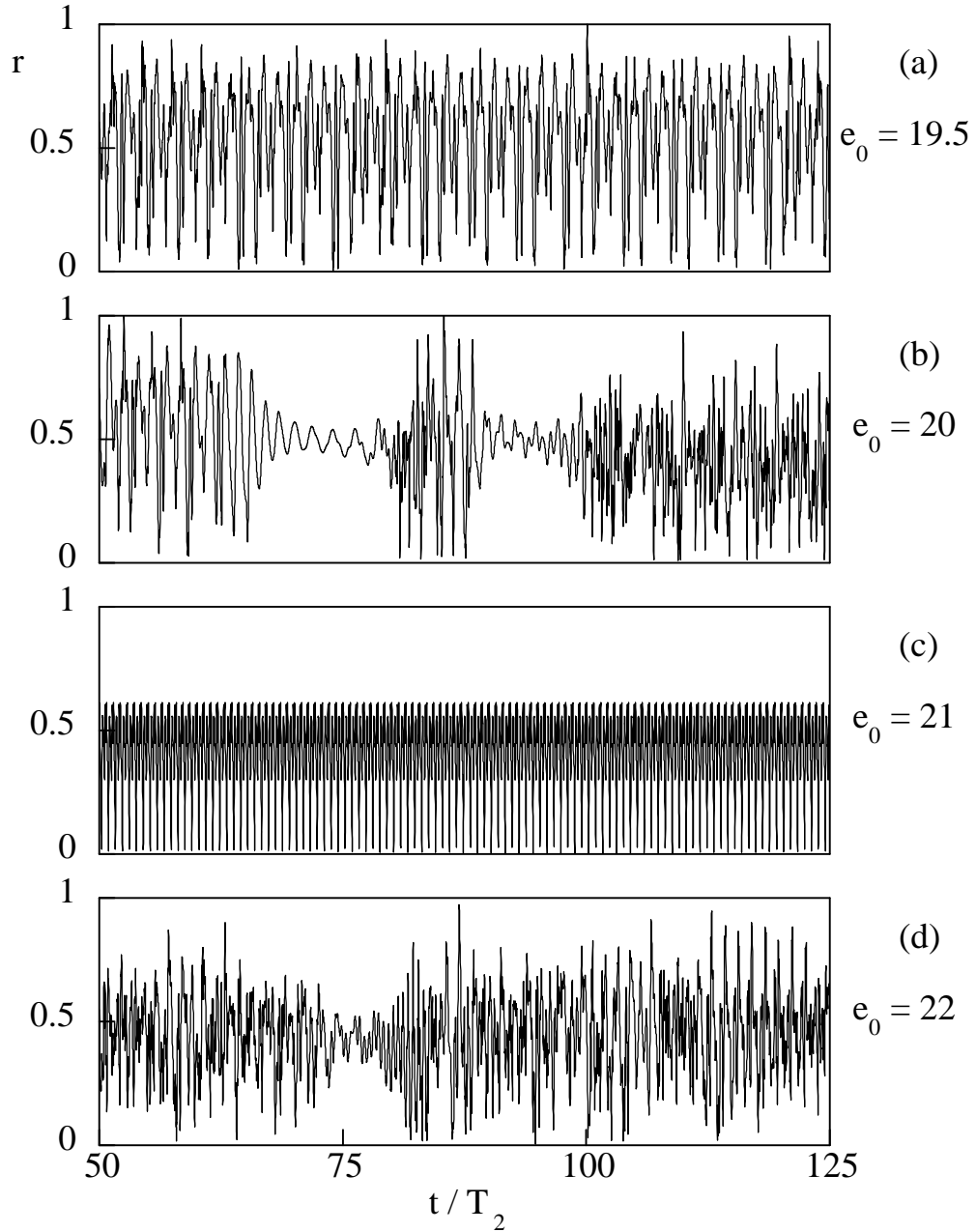


Figura 41. Series temporales de la reflectividad para valores crecientes del campo incidente con parámetros  $\Psi = 18$ ,  $\delta = -\Psi$ .

Si el campo toma valores superiores, el comportamiento es siempre del tipo del que aparece en la figura 41d para  $e_0 = 22$ , absolutamente inestable. La forma intermitente de alcanzar esta inestabilidad no es

novedosa sino que se repite en muchos otros sistemas de tipo caótico [29].

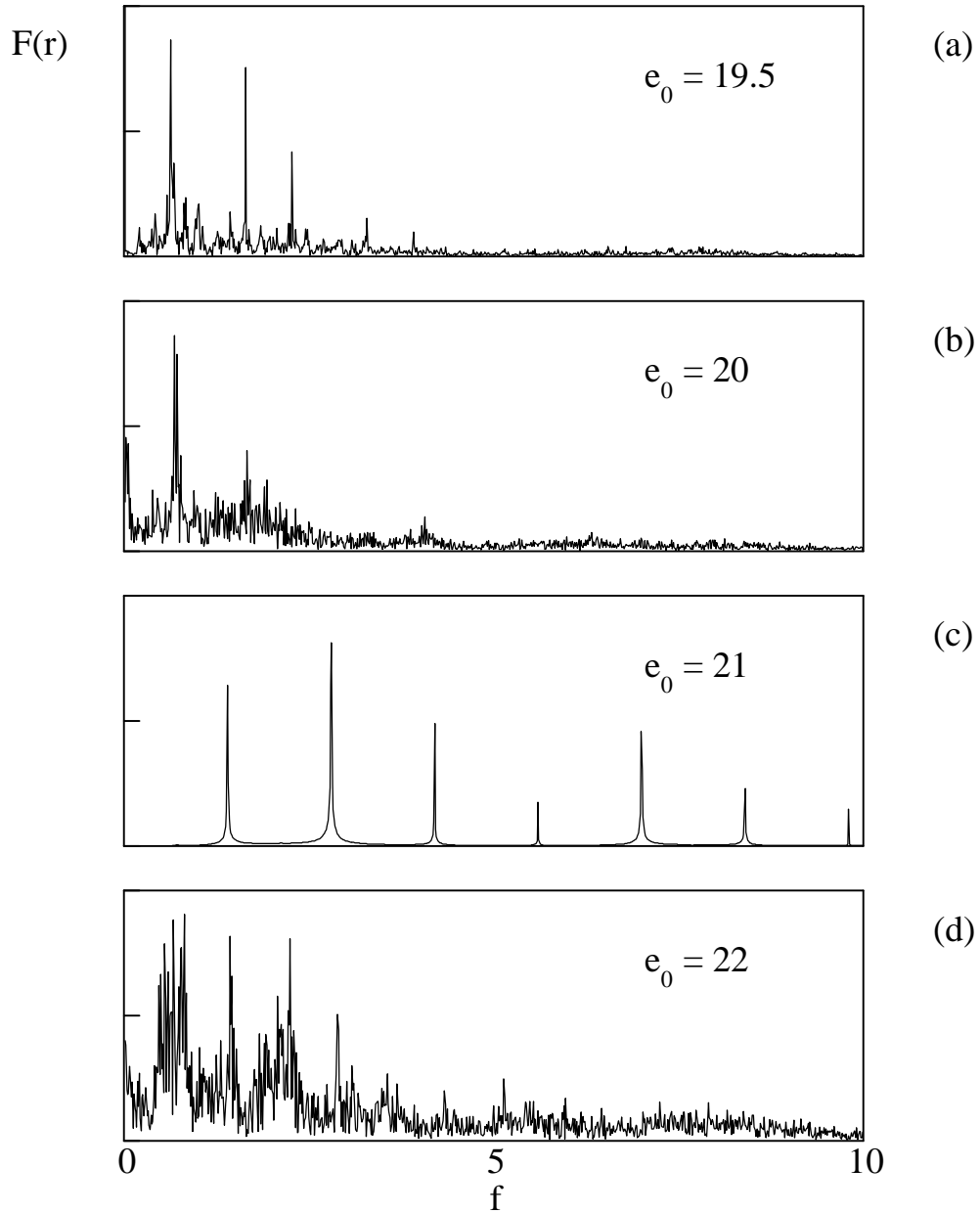


Figura 42. Transformadas de Fourier correspondientes a las series temporales de la figura anterior.

En esta segunda figura (42) vemos el análisis espectral de las

anteriores series que evidencia mucho mejor el paso de un régimen regular a otro irregular o caótico, caracterizado por espectros continuos con ciertas frecuencias privilegiadas que lo distinguen de fenómenos de ruido.

No hemos desarrollado todavía un método que nos permita reducir la dimensionalidad del problema (infinita al ser un medio continuo) para conseguir unas pocas variables que contengan toda la información acerca de la evolución del sistema. Otra posibilidad es realizar un desarrollo de nuestras variables (campo eléctrico, diferencia de población y polarización) en modos correspondientes a distintas frecuencias y quedarnos con unos cuantos que describan bien el comportamiento del absorbente. Este procedimiento es bastante habitual en la óptica cuántica [16, 23] pero creemos que en nuestro caso necesitaremos muchos modos dada la gran inhomogeneidad y complejidad del sistema.



## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

A lo largo del presente trabajo hemos realizado un estudio del fenómeno de propagación y reflexión de la luz en un medio absorbente denso, partiendo del caso más sencillo hasta desarrollar una técnica que nos permite resolver las ecuaciones de evolución de este sistema en el caso más complicado. Podemos resumir los resultados obtenidos en los siguientes puntos:

- Se han resuelto por vez primera las ecuaciones de evolución temporal del sistema, utilizando la forma integral de la ecuación de propagación.
- Se ha comprobado la posibilidad de conmutación entre las ramas de los ciclos de histéresis teóricos, confirmando las previsiones de los primeros resultados en régimen estacionario [2, 7 - 9].
- Se han encontrado comportamientos complejos en la respuesta dinámica como son autooscilaciones, casiperiodicidad y finalmente caos.

De cara a verificar experimentalmente la existencia de estos fenómenos es necesario encontrar materiales que tengan una respuesta dieléctrica similar en ciertas zonas del espectro a la que hemos venido utilizando. Una posibilidad son los cristales orgánicos con excitones de tipo Frenkel (antraceno, naftaleno, etc.). La banda prohibida polaritónica en el espectro de excitaciones de estos materiales puede aparecer a bajas temperaturas debido a la mezcla de excitones y fotones (ver [25, 26, 31]).

Otra posibilidad son medios semiconductores que manifiesten efectos polaritónicos [32].

Hasta aquí las conclusiones que podemos extraer de este trabajo. Dado que el tema no está cerrado, en el futuro pensamos seguir estudiando este tipo de sistemas centrándonos principalmente en dos aspectos:

- Inclusión de los efectos debidos a la corrección del campo local (ver Apéndice B) que son importantes para estas densidades grandes, aunque pensamos que no harán variar las características principales del problema.
- Descripción de la evolución del sistema por medio de un modelo simplificado, bien sea encontrando unas pocas variables importantes o realizando un desarrollo en modos, de forma que podamos explicar completamente el paso de un régimen a otro (estabilidad, autooscilaciones, caos) e incluso pronosticar comportamientos distintos.



## APÉNDICE A

### LA ECUACIÓN DE DISPERSIÓN

En el caso de un medio lineal hemos dicho (1.12) que puede escribirse

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = (1 + 4\pi\chi)\vec{E} \equiv \varepsilon\vec{E} \quad (\text{A.1})$$

En un medio en general, la polarización eléctrica surge como reacción al campo externo. Para campos que varían a lo largo del tiempo  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ , la polarización  $\vec{P}(\vec{r}, t)$  depende de los valores del campo en el punto  $\vec{r}$  y su entorno inmediato en todos los tiempos precedentes, debido a efectos de retardo y a las propiedades colectivas de las excitaciones electrónicas. En la aproximación lineal podemos escribir

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \int_0^\infty d\tau \int_{|\vec{s}| < c\tau} d^3\vec{s} \, \mathbf{K}(\vec{s}, \tau; \vec{r}) \vec{E}(t - \tau, \vec{r} + \vec{s}) \quad (\text{A.2})$$

Donde  $\mathbf{K}(\vec{s}, \tau; \vec{r})$  es un tensor cuya dependencia con  $\vec{s}$  caracteriza el carácter no local del enlace. Debido al principio de causalidad la integración en la coordenada espacial se extiende al dominio dentro del cono de luz correspondiente al pasado. En un medio espacialmente homogéneo ilimitado el tensor  $\mathbf{K}$  no depende de  $\vec{r}$ , que será lo que supongamos.

En el caso general la permitividad o función dieléctrica se define como un tensor que liga las transformadas de Fourier de los vectores desplazamiento y campo eléctrico  $\vec{D}(\vec{k}, \omega)$  y  $\vec{E}(\vec{k}, \omega)$  respectivamente

$$\vec{D}(\vec{k}, \omega) = \varepsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega) \quad (\text{A.3})$$

Es decir, es una relación de naturaleza dinámica y no estática [22]. Usando la ecuación material y la expresión de la polarización eléctrica y aplicando la transformada de Fourier es inmediato que

$$\varepsilon(\vec{k}, \omega) = 1 + \int_0^\infty d\tau \int_{|\vec{s}| < c\tau} d^3\vec{s} \mathbf{K}(\vec{s}, \tau) \exp[i(\omega\tau + \vec{k}\vec{s})] \quad (\text{A.4})$$

Vemos pues que en general la función dieléctrica depende de la frecuencia y del vector de onda. La primera dependencia se llama dispersión temporal y la segunda dispersión espacial. Nosotros nos restringimos a excitaciones locales de forma que

$$\mathbf{K}(\vec{s}, \tau) = \mathbf{K}(\tau) \delta(\vec{s}) \quad (\text{A.5})$$

siendo  $\delta(\vec{s})$  la distribución de Dirac, con lo cual sólo tenemos dispersión temporal

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty d\tau \mathbf{K}(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (\text{A.6})$$

De ahí viene la dependencia con la frecuencia del campo de la función dieléctrica que siempre suponemos: su definición a partir de las transformadas de Fourier hace que aparezca de forma natural.

Cuando los campos con los que tratamos son monocromáticos o casimonocromáticos (con envolventes muy suaves), la función dieléctrica se restringe a la zona de frecuencias muy próximas a la del campo y

podemos considerarla prácticamente constante, que es lo que suponemos en el caso del medio lineal. Por eso la igualdad (1.11)

$$P = \chi E \tag{A.7}$$

hay que entenderla para cada frecuencia.

Por otro lado, que cuando el campo eléctrico incidente tiene forma de onda plana con una función dieléctrica concreta en cada caso, la ecuación de ondas nos lleva directamente a la ecuación de dispersión

$$\vec{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = 0 \tag{A.8}$$

cuyas soluciones nos dan las excitaciones propias del sistema, entre ellas los polaritones. (Ver [21, 22])



## APÉNDICE B

### MODELO MICROSCÓPICO DEL SISTEMA

Como modelo microscópico de nuestro sistema utilizaremos la teoría semiclásica: consideraremos clásico el campo eléctrico (suposición siempre válida en los rangos de intensidades altas que nos movemos) y cuántico el sistema atómico, en concreto formado por átomos de dos niveles.

Partiremos de la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo, que para un átomo sobre el que actúa un campo electromagnético externo podemos escribir [5]

$$(H_0 - e\vec{E} \cdot \vec{r})\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (\text{B.1})$$

donde  $H_0$  es el hamiltoniano atómico

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(r) \quad (\text{B.2})$$

$U(r)$  es el potencial electrostático atómico. Esta ecuación es válida en la aproximación dipolar o de onda larga, esto es, cuando consideramos que el campo varía poco en distancias del orden de las atómicas, suposición cierta para las longitudes de onda habituales en infrarrojo, visible e incluso ultravioleta. Por tanto supondremos que a escala atómica  $\vec{E}(\vec{r}, t) \approx \vec{E}(t)$ , pero a escalas mayores (distancias entre átomos) el campo sí depende del espacio.

Al resolver el hamiltoniano atómico obtendremos como soluciones un conjunto completo de estados propios (los orbitales atómicos)  $\phi_n(\vec{r})$  cuyas energías serán  $\epsilon_n = \hbar\omega_n$ . Dado que estos estados forman una base del espacio de funciones de onda, podremos escribir la solución de la ecuación de Schrödinger completa como combinación lineal de ellos:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_n a_n(t) \phi_n(\vec{r}) \quad (\text{B.3})$$

introduciendo esta solución en nuestra ecuación, teniendo en cuenta que las  $\phi_n(\vec{r})$  son las soluciones del hamiltoniano atómico y proyectando sobre la función  $\phi_m(\vec{r})$  llegamos a un sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para los coeficientes  $a_n$

$$i \frac{da_n}{dt} = \omega_n a_n + \sum_m V_{nm}(t) a_m(t) \quad (\text{B.4})$$

con

$$V_{nm} = \frac{-e}{\hbar} \int \phi_m^*(\vec{r}) \vec{r} \phi_n(\vec{r}) d^3\vec{r} \cdot \vec{E} \equiv \frac{-1}{\hbar} \vec{d}_{nm} \cdot \vec{E} \quad (\text{B.5})$$

$\vec{d}_{nm} = -e\vec{r}_{nm}$  es el momento dipolar entre los estados  $n$  y  $m$ .

Debido a la normalización de las funciones de onda tiene que verificarse que

$$\sum_n |a_n(t)|^2 = 1 \quad (\text{B.6})$$

en todo instante de tiempo. Las poblaciones de los distintos niveles o

probabilidades de que el sistema se encuentre en dichos niveles serán

$$p_n(t) = |a_n(t)|^2 \quad (\text{B.7})$$

Para hacer la aproximación de átomos de dos niveles pensemos que podemos escribir la dependencia temporal del campo eléctrico en la forma

$$\vec{E}(t) = \frac{1}{2} \vec{E}(t) e^{-i\omega_0 t} + c. c. \quad (\text{B.8})$$

donde  $\vec{E}$  es una envolvente muy lentamente variable en el tiempo y que la frecuencia de la luz incidente  $\omega_0$  está cercana a la frecuencia de la transición entre dos niveles atómicos  $\omega_T$  (entre los cuales sea posible una transición de tipo dipolar eléctrica) y muy lejos de cualesquiera otras posibles transiciones atómicas, con lo cual la probabilidad de que ocurran éstas es prácticamente nula, es decir estamos en las proximidades de una resonancia. Si llamamos a esos dos estados 1 y 2 el esquema de nuestros sistemas será el que indica la figura B1.

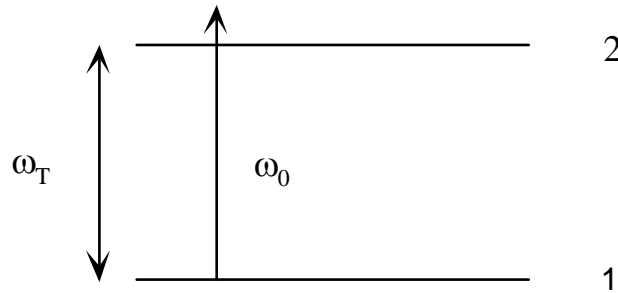


Figura B1. Esquema de un sistema de dos niveles con frecuencia del campo incidente por encima de resonancia.

Si colocamos nuestro origen de energías en el nivel inferior

( $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \omega_T$ ) y tenemos en cuenta que por la paridad definida de los estados atómicos  $\vec{d}_{11} = \vec{d}_{22} = 0$  (no hay momentos dipolares permanentes) nuestro problema se reduce a las dos ecuaciones

$$\frac{da_1}{dt} = -iV_{12}a_2 \quad (\text{B.9.a})$$

$$\frac{da_2}{dt} = -i\omega_T a_2 - iV_{21}a_1 \quad (\text{B.9.b})$$

Introduzcamos ahora el operador densidad, que en este caso de dos estados puros toma la sencilla forma matricial [23]

$$\rho = \begin{pmatrix} a_1 a_1^* & a_1 a_2^* \\ a_2 a_1^* & a_2 a_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Las cantidades  $\rho_{12}$  y  $\rho_{21}$  están relacionadas con el desplazamiento medio de los electrones (y por tanto con la polarización eléctrica, como veremos) puesto que para el átomo de dos niveles es inmediato comprobar que

$$\langle \vec{d} \rangle = \vec{d}_{12} a_1^* a_2 + \vec{d}_{21} a_2^* a_1 \quad (\text{B.11})$$

mientras que  $\rho_{11}$  y  $\rho_{22}$  no son más que las poblaciones de ambos niveles.

A partir de las ecuaciones para los coeficientes o bien directamente usando la ecuación de evolución del operador densidad

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho] \quad (\text{B.12})$$

completamente equivalente a la de Schrödinger y que podemos emplear



en el caso más general de un sistema cuántico formado por muchas partículas, llegamos a las siguientes ecuaciones de evolución para los elementos de la matriz densidad

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = -iV_{21}\rho_{12} + c.c. \quad (\text{B.13.a})$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = iV_{21}\rho_{12} + c.c. \quad (\text{B.13.b})$$

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -i\omega_T\rho_{21} + iV_{21}(\rho_{22} - \rho_{11}) \quad (\text{B.13.c})$$

Podemos ver cómo se conserva la población total  $\rho_{11} + \rho_{22} = 1$  debido a la normalización y la ecuación para  $\rho_{12}$  es compleja conjugada de la de  $\rho_{21}$  (B.13.c).

Introduzcamos ahora fenomenológicamente (aunque está plenamente justificado en la teoría cuántica [23]) en nuestras ecuaciones la posibilidad de relajaciones en las poblaciones (únicamente la debida a transiciones del nivel 2 al 1, puesto que las otras posibles las consideramos improbables), representada por el tiempo  $T_1$  que indica el tiempo de vida media del estado excitado, y en la coherencia, por  $T_2$ . Las ecuaciones (B.13) se reducen a

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = -i\frac{\mu}{\hbar}E(\rho_{12} - \rho_{21}) + \frac{1}{T_1}\rho_{22} \quad (\text{B.14.a})$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = i\frac{\mu}{\hbar}E(\rho_{12} - \rho_{21}) - \frac{1}{T_1}\rho_{22} \quad (\text{B.14.b})$$

$$\frac{d\rho_{21}}{dt} = -i\frac{\mu E}{\hbar}(\rho_{22} - \rho_{11}) - \left(i\omega_T + \frac{1}{T_2}\right)\rho_{21} \quad (\text{B.14.c})$$

y ya hemos sustituido  $V_{21}$  por su valor

$$V_{21} = \frac{-1}{\hbar}\vec{d}_{21} \cdot \vec{E} \equiv \frac{-\mu}{\hbar}E \quad (\text{B.15})$$

suponiendo que la proyección del momento dipolar en la dirección del campo es real (basta elegir las fases adecuadamente) y pasando ya a la aproximación unidimensional que venimos utilizando en este trabajo.

Esas tres ecuaciones gobiernan el comportamiento de un átomo de dos niveles en presencia del campo externo. En cuanto a éste, su evolución viene dada por la ecuación de ondas general (1.9). Para relacionar la polarización macroscópica  $P$  con los parámetros microscópicos recordemos que se define como el valor esperado del momento dipolar por unidad de volumen [3]

$$P(x, t) \equiv \langle er \rangle = \frac{1}{\Omega} \sum ed_{12} (\rho_{12} + \rho_{21}) = \mu N_0 (\bar{\rho}_{12} + \bar{\rho}_{21}) \quad (\text{B.16})$$

donde la suma se realiza sobre un elemento de volumen  $\Omega$  que contiene muchos átomos pero es pequeño respecto a la longitud de onda del campo eléctrico y  $N_0$  es la densidad de átomos en el medio, que consideramos uniforme; si no lo fuera habría que realizar un promedio con la distribución de densidades dependiente de la frecuencia (ensanchamiento inhomogéneo). El valor de los elementos de la matriz densidad promediados  $\bar{\rho}_{12}$  y  $\bar{\rho}_{21}$  dependerá ahora de la coordenada  $x$ . Por no complicar la notación omitiremos de ahora en adelante la barra que indica los promedios.

Promediando del mismo modo sobre todos los átomos en el elemento de volumen las ecuaciones del sistema de dos niveles para pasar a magnitudes macroscópicas tendremos las ecuaciones materiales. El campo eléctrico será ahora el macroscópico, con dependencia de la coordenada sin salirnos de la aproximación dipolar como ya explicamos.

Hagamos ahora la aproximación de la onda rotante (RWA) o de la envolvente lentamente variable en el tiempo, es decir supongamos que la dependencia temporal de nuestras variables es "casiarmónica", que es lo que hemos venido haciendo siempre:

$$E(x, t) = \frac{1}{2} E(x, t) e^{-i\omega_0 t} + c. c. \quad (B.17.a)$$

$$\rho_{21}(x, t) = \frac{1}{2} R(x, t) e^{-i\omega_0 t} \quad (B.17.b)$$

con las condiciones de la SVEA:

$$\left| \frac{d^2 E}{dt^2} \right| \ll \omega_0 \left| \frac{dE}{dt} \right| \ll |\omega_0^2 E| \quad (B.18.a)$$

$$\left| \frac{d^2 R}{dt^2} \right| \ll \omega_0 \left| \frac{dR}{dt} \right| \ll |\omega_0^2 R| \quad (B.18.b)$$

La suposición de las envolventes suaves es muy razonable en casi todos los casos de interés práctico. En primer lugar el campo eléctrico incidente tendrá forma de pulso de duración  $T_p$  que siempre será mucho mayor que el período óptico (de hecho sólo recientemente se han conseguido pulsos cuyo tamaño son unos pocos femtosegundos y cuya propagación hay que estudiar fuera de la SVEA, pero no los consideramos aquí. Habitualmente su duración será superior al picosegundo y entonces  $T_p \gg 1/\omega_0$ ). Por otro lado, de las frecuencias relativas a los procesos microscópicos del sistema, sólo la de la transición atómica  $\omega_T$  es comparable a  $\omega_0$  (estamos en resonancia), mientras que tanto la frecuencia de Rabi [5]  $\Omega = \mu E/\hbar$ , como  $T_1^{-1}$  y  $T_2^{-1}$  que son las frecuencias de variación de los elementos de la matriz densidad (ver ecuaciones B.14) son mucho menores que la del campo incidente (salvo para intensidades del campo mucho mayores que

las que consideramos aquí).

Despreciando entonces completamente las variaciones temporales de las envolventes en la ecuación de ondas llegamos a las ecuaciones de Maxwell-Bloch, que usaremos para resolver la propagación del campo en nuestro sistema:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = i \frac{\mu}{2\hbar} (ER^* - E^* R) - \frac{1}{T_1} (1 + W) \quad (\text{B.19.a})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -i \frac{\mu E}{\hbar} W - \left( i\Delta + \frac{1}{T_2} \right) R \quad (\text{B.19.b})$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k_0^2 E = -4\pi k_0^2 \mu N_0 R \quad (\text{B.19.c})$$

donde hemos definido una nueva variable llamada diferencia de población  $W = \rho_{22} - \rho_{11}$  y aparece la desintonía  $\Delta = \omega_T - \omega_0$ . Estas ecuaciones fueron usadas por primera vez para describir fenómenos ópticos por Feynman, Vernon y Hellwarth [33].

Veamos cómo recuperar la expresión de la función dieléctrica que hemos venido utilizando. Para ello resolvamos el sistema en el caso estacionario. Anulando las derivadas temporales de  $R$  y  $W$ , despejando estas variables en función del campo eléctrico y sustituyendo en la ecuación de propagación de éste llegamos al siguiente resultado

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + k_0^2 \left\{ 1 + \frac{4\pi}{\hbar} \frac{\mu^2 N_0 T_2 (i + \Delta T_2)}{(\Delta T_2)^2 + 1 + \mu^2 |E|^2 T_1 T_2 / \hbar^2} \right\} E = 0 \quad (\text{B.20})$$

Comparando con la ecuación de Helmholtz (3.3) vemos que la función dieléctrica tiene la forma

$$\varepsilon(E) = 1 + \frac{4\pi\mu^2 N_0 T_2}{\hbar} \frac{i + \Delta T_2}{(\Delta T_2)^2 + 1 + \mu^2 |E|^2 T_1 T_2 / \hbar^2} \quad (\text{B.21})$$

y definiendo los parámetros

$$\Psi = \frac{2\pi\mu^2 N_0 T_2}{\hbar} \quad (\text{B.22.a})$$

$$\delta = \Delta T_2 \quad (\text{B.22.b})$$

$$\theta = \frac{\mu^2}{\hbar^2} T_1 T_2 \quad (\text{B.22.c})$$

obtenemos la expresión [2]

$$\varepsilon = 1 + 2\Psi \frac{\delta + i}{1 + \delta^2 + \theta |E|^2} \quad (\text{B.23})$$

Para valores pequeños del campo eléctrico puede despreciarse  $|E|^2$  en el denominador y llegamos a la función dieléctrica lineal

$$\varepsilon_L = 1 + 2\Psi \frac{\delta + i}{1 + \delta^2} \quad (\text{B.24})$$

Es posible en este caso lineal llegar a esa expresión por un método enteramente clásico, el modelo de Lorentz [5, 6] que considera los átomos en presencia del campo eléctrico monocromático de frecuencia  $\omega_0$  como si fuesen osciladores forzados con fricción con frecuencias propias  $\omega_j$  para llegar a una expresión para la función dieléctrica

$$\varepsilon = 1 + \sum_j A_j \frac{1}{\omega_j^2 - \omega_0^2 - i\gamma_j \omega_0} \quad (\text{B.25})$$

Cuando estamos cerca de una resonancia  $\omega_0 \approx \omega_k$  podemos despreciar los términos del sumatorio correspondientes a otras frecuencias propias pues los denominadores serán muy grandes y quedarnos únicamente con la contribución del oscilador resonante. Además podemos hacer la aproximación

$$|\Delta| = |\omega_k - \omega_0| \ll \omega_0, \omega_k \quad (\text{B.26})$$

con lo cual

$$\omega_k^2 - \omega_0^2 = (\omega_k + \omega_0)(\omega_k - \omega_0) \approx 2\omega_0 \Delta \quad (\text{B.27})$$

y relacionando los parámetros del oscilador con los del átomo de dos niveles recuperamos nuestra conocida fórmula en el caso lineal. De este modo lo que hemos llamado densidad óptica tiene mucho que ver con las frecuencias propias de oscilación de los electrones en el medio. Para una comparación detallada entre los dos modelos ver [5].

Estamos considerando como única contribución a la respuesta dieléctrica la de los electrones ligados a los iones (ya sea cuánticamente como átomos de dos niveles o en la teoría clásica como osciladores forzados). En un sólido siempre puede haber otras contribuciones: en primer lugar las debidas a efectos de relajación de dipolos microscópicos, relacionadas con frecuencias por debajo de las que consideramos, que dan una constante dieléctrica de fondo. En nuestro caso esa aportación se reduce a cambiar el 1 en la expresión de la función dieléctrica (B.23) por algún  $\varepsilon_F$ , lo cual no afecta en absoluto al problema. Tenemos también las aportaciones debidas al movimiento iónico (fonones ópticos y acústicos)

cuyas frecuencias propias están en regiones mucho más bajas que las electrónicas por ser la masa iónica mayor y que por ello no consideramos. En el caso de metales existe también la contribución de electrones libres, que se describe por medio de la frecuencia de plasma, pero nuestro absorbente es un dieléctrico en el que la frecuencia del campo queda muy por debajo de la energía de ionización y esa contribución es nula. Tampoco estamos en el caso de un material semiconductor, que a todo lo dicho añade las transiciones entre bandas y por todos estos motivos nuestra expresión es válida con generalidad dentro del intervalo de frecuencias ópticas en el que nos movemos (salvo por el hecho del campo local que veremos a continuación).

Para explicaciones más detalladas sobre las distintas contribuciones a la función dieléctrica pueden consultarse [6, 34].

## EL PROBLEMA DEL CAMPO LOCAL

Al pasar de las ecuaciones que describen la interacción de un solo átomo de dos niveles con el campo eléctrico incidente a las macroscópicas para la colectividad, hemos realizado simplemente un promedio, suponiendo que la respuesta de cada átomo no se ve afectada por la presencia de átomos vecinos. Esto tiene sentido en materiales poco densos (gases a baja presión, por ejemplo) en que la distancia entre átomos es relativamente grande, pero en medios sólidos densos como nos interesan a nosotros hay que considerar la contribución de los átomos vecinos.

Si pensamos que cada átomo en presencia del campo eléctrico se comporta como un dipolo elemental de momento dipolar  $\mu$ , el campo que

realmente ve es el campo medio más el creado por todos los dipolos próximos que le rodean. Utilizando esta idea Lorentz y otros dedujeron que el campo microscópico era

$$E_{local} = E + \frac{4\pi}{3} P \quad (B.28)$$

en el caso de que la simetría de la red iónica fuera cúbica, aunque la expresión es válida también en sistemas sin simetría (gases, líquidos, sólidos amorfos). Si la estructura es más complicada puede variar el factor  $4\pi/3$  pero como es de esperar el campo local es el promedio más un término proporcional a la polarización. Un análisis del problema del campo local y las ecuaciones macroscópicas para dieléctricos junto con numerosas referencias históricas puede encontrarse en [22].

Podemos sustituir entonces el campo en las ecuaciones materiales por el campo local para incluir el efecto de los átomos vecinos. En la ecuación de ondas sin embargo el campo es el macroscópico, el de Maxwell, no el que localmente ven los átomos. Realizando este cambio la única variación en nuestras ecuaciones es que la desintonía se ve corregida con un término proporcional a la diferencia de población

$$\Delta' = \Delta + \frac{4\pi}{3} \frac{\mu^2 N_0}{\hbar} W \equiv \Delta + \Delta_L W \quad (B.29)$$

en el caso de simetría cúbica. En el caso más general la expresión será la misma pero  $\Delta_L$  tendrá un valor distinto dependiente igualmente de la densidad de átomos.

Así pues la presencia de átomos vecinos se trasluce en un cambio en la desintonía, hay un desplazamiento en la frecuencia propia del



sistema de dos niveles de forma que varían las condiciones de resonancia. En la figura siguiente vemos representada la variación de la desintonía en el caso en que dicha variación es máxima, que corresponde a una diferencia de población  $W = -1$ .

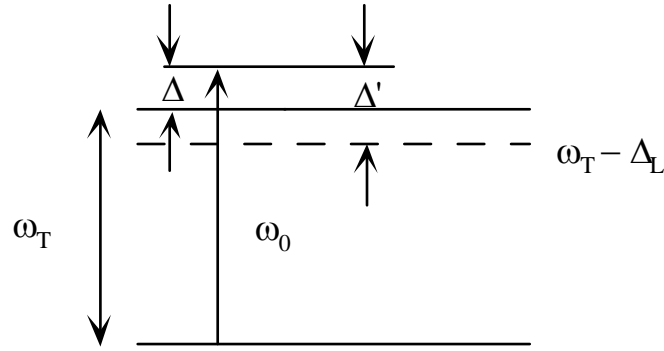


Figura B2. Esquema del sistema de dos niveles con la corrección del campo local en el caso  $W = -1$ .

Dado que los niveles atómicos excitados tienen cierta anchura (relacionada con su tiempo de vida media, en este caso  $T_1$  y  $T_2$ ) si el desplazamiento provocado por el campo local no es suficiente para sacarlos de esa banda, esta corrección apenas tendrá importancia y podemos prescindir de ella. En otro caso habrá que tenerla muy en cuenta. Hasta la fecha se han publicado varios trabajos analizando la importancia de esta corrección en gases y sólidos pero fuera de las condiciones de autorreflexión [14, 35 - 38].

Nosotros en este trabajo no hemos considerado esta contribución pues pensamos que no afecta cualitativamente a los resultados (aunque sí cuantitativamente), complicando considerablemente los cálculos. En estos momentos estamos trabajando en una ampliación de la teoría con la corrección del campo local.



## APÉNDICE C

### FORMA INTEGRAL DE LA ECUACIÓN DE ONDAS

La forma integral de la ecuación de ondas ya hemos dicho que puede entenderse como el principio de superposición lineal: el campo eléctrico que actúa sobre un punto de un material es la suma del campo incidente más las interacciones con los dipolos que rodean dicho punto. Puede obtenerse entonces de forma relativamente simple el teorema de extinción de Ewald-Olsen (véase por ejemplo [4]) cuya interpretación es que la onda incidente desaparece en el medio material como resultado de la interferencia con el campo dipolar y es reemplazada por otra en general de diferentes características (velocidad, dirección, etc.).

Esta forma es muy apropiada, casi diríamos que indispensable, para la solución de problemas de propagación no lineal en regímenes transitorios y se ha utilizado particularmente en el estudio de la propagación de un campo eléctrico a través de una lámina delgada [11 - 14]. Aquí vamos a comprobar su equivalencia con la forma diferencial prescindiendo de la interacción dipolo-dipolo y por tanto de la corrección del campo local, siguiendo la referencia [15].

Comencemos con el caso más general sin hacer suposiciones sobre la forma del campo eléctrico pero restringiéndonos como siempre al caso unidimensional de incidencia normal. Partimos de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \quad (\text{C.1})$$

Vamos a resolverla usando la teoría de las funciones de Green [39].

Como es sabido la solución de una ecuación diferencial no homogénea como esta es la suma de la solución general de la homogénea más una solución particular de la ecuación total. Esa solución particular se halla mediante la función de Green o propagador de la ecuación, que es solución de la homogénea en todo punto salvo en el origen y que debe tener una serie de propiedades de simetría.

En nuestro caso la función de Green  $G(x - x', t - t')$  obedecerá la ecuación

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -\delta(x - x')\delta(t - t') \quad (C.2)$$

donde  $\delta$  es la conocida función (distribución en realidad) de Dirac.

Esa ecuación tiene dos tipos de solución: avanzada y retardada, pero sólo nos interesa la segunda que contiene el principio de causalidad: el efecto de una perturbación es posterior a que ésta ocurra. La solución avanzada sólo se utiliza en problemas de teoría cuántica de campos para fenómenos instantáneos y en nuestro caso no tiene sentido físico.

Por tanto la solución es

$$G^{ret}(\zeta, \tau) = \frac{c}{2} \Theta\left(\tau - \frac{|\zeta|}{c}\right) \quad (C.3)$$

donde  $\zeta = x - x'$ ,  $\tau = t - t'$  y  $\Theta$  es la distribución salto de Heaviside definida mediante

$$\Theta(z) = 0; \quad z < 0 \quad (\text{C.4.a})$$

$$\Theta(z) = 1; \quad z > 0 \quad (\text{C.4.b})$$

$$\frac{d\Theta(z)}{dz} = \delta(z) \quad (\text{C.4.c})$$

De forma equivalente la solución puede escribirse como

$$G^{ret}(\zeta, \tau) = \frac{c}{2} \Theta\left(\tau - \frac{\zeta}{c}\right) \Theta\left(\tau + \frac{\zeta}{c}\right) \quad (\text{C.5})$$

forma en la que es trivial verificar que cumple la ecuación diferencial.

La solución de la ecuación homogénea que se elige es el campo incidente desde el exterior del absorbente  $E_i(x, t)$  y que sabemos que verificará

$$E_i = f(x - ct) + b(x + ct) \quad (\text{C.6})$$

La solución de la no homogénea es la superposición de las ondas elementales originadas en cada punto del absorbente, esto es, la propagación de la perturbación. Tenemos entonces que

$$E(x, t) = E_i(x, t) - \int_0^\infty dx' \int_{-\infty}^\infty dt' G^{ret}(x - x', t - t') \frac{4\pi}{c^2} \left( \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \right)_{t=t'} \quad (\text{C.7})$$

y sustituyendo la expresión para la función de Green e integrando por partes respecto de la variable temporal llegamos a

$$E(x, t) = E_i(x, t) - \frac{2\pi}{c} \int_0^\infty dx' \frac{\partial}{\partial t} P\left(x', t - \frac{|x - x'|}{c}\right) \quad (\text{C.8})$$

Dada una onda incidente, la onda transmitida es la solución de esa ecuación para  $x > 0$  mientras que la reflejada está descrita por el término integral en  $x \leq 0$ . Las condiciones de contorno están implícitas en la elección de la onda incidente como solución homogénea.

El paso siguiente consiste en hacer la aproximación de la envolvente lentamente variable en el tiempo pero no en el espacio, es decir escribiendo los campos en las conocidas formas

$$E_i(x, t) = \frac{1}{2} E_i(x, t) e^{-i\omega_0 t} + c. c. \quad (\text{C.9.a})$$

$$E(x, t) = \frac{1}{2} E(x, t) e^{-i\omega_0 t} + c. c. \quad (\text{C.9.b})$$

$$P(x, t) = \frac{1}{2} P(x, t) e^{-i\omega_0 t} + c. c. \quad (\text{C.9.c})$$

Despreciando en la integral el término  $\partial P / \partial t$  en comparación con  $i\omega P$  obtenemos

$$E(x, t) = E_i(x, t) + 2\pi i k_0 \int_0^\infty dx' P\left(x', t - \frac{|x - x'|}{c}\right) \exp(i k_0 |x - x'|) \quad (\text{C.10})$$

Como la absorción total ocurrirá en un intervalo muy pequeño del medio de pocas longitudes de onda, la contribución a la integral de puntos más allá de esa longitud efectiva será nula y por tanto es posible despreciar el tiempo de propagación  $|x - x'|/c$  pagando el precio de perder los efectos de causalidad pero acelerando los cálculos sin variaciones apreciables en

los resultados obtenidos. Teniendo en cuenta además que por nuestras definiciones se verifica que

$$P(x, t) = \mu N_0 R(x, t) \quad (C.11)$$

la forma integral de la ecuación de ondas que utilizaremos se reduce a

$$E(x, t) = E_i(x, t) + 2 \pi i k_0 \mu N_0 \int_0^\infty dx' \exp(i k_0 |x - x'|) R(x', t) \quad (C.12)$$

donde prescindimos de los efectos de causalidad como ya hemos dicho.





## REFERENCIAS

1. M. Pons and L. Roso, "Space singularities in the penetration of a plane wave inside a very dense saturable absorber", *Europhys. Lett.* **12**, 507-512 (1990).
2. M. Ll. Pons, *Contribution to the Study of the nonlinear Propagation of a Plane Wave in a Dense Absorber*, Tesis Doctoral (Universidad Aut3noma de Barcelona, 1991).
3. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, 1975, 2<sup>a</sup> edici3n).
4. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, 1983, 6<sup>a</sup> edici3n).
5. P. W. Milonni and J. H. Eberly, *Lasers* (John Wiley & Sons, 1988).
6. G. Burns, *Solid State Physics* (Academic Press, 1985).
7. L. Roso-Franco, "Self-reflected wave inside a very dense saturable absorber", *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2149-2151 (1985).
8. L. Roso-Franco, "Propagation of light in a nonlinear absorber", *JOSA B* **4**, 1878-1884 (1987).
9. L. Roso-Franco and M. Ll. Pons, "Reflection of a plane wave at the boundary of a saturable absorber: normal incidence", *J. Mod. Opt.* **37**, 1645-1653 (1990).
10. V. Malyshev and E. Conejero Jarque, "Optical hysteresis and instabilities inside polariton band gap", aceptado en *JOSA B*.
11. M. G. Benedict, E. D. Trifonov, "Coherent reflection as superradiation from the boundary of a resonant medium", *Phys. Rev. A* **38**, 2854-2862 (1988).

12. M. G. Benedict, A. I. Zaitsev, V. A. Malyshev, E. D. Trifonov, "Resonance interaction of an ultrashort light pulse with a thin film", Opt. Spektrosk. **66**, 726-728 (1989) Traducción al inglés: Opt. Spectrosc. (USSR) **66**, 424-426 (1989)..
13. M. G. Benedict, A. I. Zaitsev, V. A. Malyshev, E. D. Trifonov, "Mirrorless bistability in passing ultrashort pulses of light through a thin layer with resonant two-level centers", Opt. Spektrosk. **68**, 812-817 (1990) Traducción al inglés: Opt. Spectrosc. (USSR) **68**, 473-476 (1990)..
14. M. G. Benedict, V. A. Malyshev, E. D. Trifonov, A. I. Zaitsev, "Reflection and transmission of ultrashort light pulses through a thin resonant medium: Local-field effects", Phys. Rev. A **43**, 3845-3853 (1991).
15. M. G. Benedict, V. A. Malyshev, I. V. Sokolov and E. D. Trifonov, *Superradiance: Theory and Experiment* (Adam Hilger, en imprenta)
16. L. A. Lugiato, "Theory of Optical Bistability", en *Progress in Optics vol XXI* (North-Holland Publishing Company, E. Wolf editor, 1984).
17. L. A. Lugiato and L. M. Narducci, "Multistability, Chaos and Spatio-temporal Dynamics", en *Fundamental Systems in Quantum Optics* (North-Holland Publishing Company, J. Talibard, J. M. Raimond and J. Zinn-Justin editors, 1992).
18. R. Bonifacio and L.A. Lugiato, "Bistable Absorption in a Ring Cavity", Lett. Nuovo Cimento **21**, 505-509 (1978).
19. R. Bonifacio and L.A. Lugiato, "Mean Field Model for Absorptive and Dispersive Bistability with Inhomogeneous Broadening", Lett. Nuovo Cimento **21**, 517-521 (1978).
20. R. Bonifacio and L.A. Lugiato, "Optical Bistability and Cooperative Effects in Resonance Fluorescence", Phys. Rev. A **18**, 1129-1144

- (1978).
21. A. S. Davydov, *Teoría del sólido* (Editorial Mir, 1981).
  22. J. van Kranendonk and J. E. Sipe, "Foundations of the Macroscopic Electromagnetic Theory of Dielectric Media", en *Progress in Optics vol. XV* (North-Holland Publishing Company, E. Wolf editor, 1977).
  23. M. Sargent III, M. O. Scully and W. E. Lamb, *Laser Physics* (Addison-Wesley, 1974).
  24. M. Born and K. Huang, *Dynamical Theory of Crystal Lattices* (Oxford University Press, 1954).
  25. J. J. Hopfield, "Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals", *Phys. Rev.* **112**, 1555-1567 (1958).
  26. V. M. Agranovich, *Zh. Experiment. Teor. Fiz.* **37**, 430 (1959)  
Traducción al inglés: *Sov. Phys. JETP* **10**, 307 (1960)..
  27. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 1992, 2ª edición).
  28. B. Segard, B. Macke, L. A. Lugiato, F. Prati and M. Brambilla, "Multimode instability in optical bistability", *Phys. Rev. A* **39**, 703-722 (1989).
  29. E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, 1993).
  30. H. G. Schuster, *Deterministic Chaos* (Physik-Verlag, 1984).
  31. A. S. Davydov, *Theory of Molecular Excitons* (Plenum Press, 1971).
  32. A. I. Rashba and M. D. Sturge, editores, *Excitons* (North-Holland, 1982).
  33. R. P. Feynman, F. C. Vernon Jr. and R. W. Hellwarth, *J. Appl. Phys.* **28**, 49 (1957).
  34. N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Saunders

College, 1976).

35. R. Friedberg, S. R. Hartmann and J. T. Manassah, "Mirrorless optical bistability conditions", Phys. Rev. A **39**, 3444 (1989).
36. R. Friedberg, S. R. Hartmann and J. T. Manassah, "Intensity dependent spectral reflectivity of a dense-gas - dielectric interface", Phys. Rev. A **42**, 5573-5579 (1990).
37. F. A. Hopf, C. M. Bowden, W. H. Louisell, "Mirrorless optical bistability with the use of local field correction", Phys. Rev. A **29**, 2591-2596 (1984).
38. Y. Ben-Aryeh, C. M. Bowden, J. C. Englund, "Intrinsic optical bistability in collections of spatially distributed two-level atoms", Phys. Rev. A **34**, 3917-3926 (1986).
39. P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, 1953).

